(Раздел из книги **"Вычислительные сети",** авторы: С.И. Самойленко, А.А.Давыдов, В.В.Золотарёв, Е.И.Третьякова, "Наука", Москва, 1981, 278с.)

Размножение ошибок декодирования в мажоритарных декодерах.

Из доказанных выше результатов, относящихся к основным свойствам МПД, вытекает, что увеличение числа попыток исправления ранее декодированных символов с помощью МПД полезно, поскольку при каждом изменении информационных битов кода происходит переход к более правдоподобным решениям. **Однако из этих результатов совершенно не следует, что МПД обязательно достигнет оптимального решения.** Для многих кодов существует весьма большое число таких сочетаний ошибок канала, что они исправляются при оптимальном декодировании, но не исправляются с помощью МПД. Это связано с тем, что пороговые декодеры действительно в довольно большой степени подвержены влиянию эффекта размножения ошибок (РО). Второй и другие последовательно соединенные пороговые элементы в свёрточном варианте, или просто следующие итерации коррекции в блоковом коде во многих случаях вынуждены работать, в основном, с потоками пакетов ошибок от предыдущих ступеней декодирования. Именно поэтому разнообразные попытки многих исследователей многократного декодирования различных кодов не принесли значимых результатов.

Ниже в качестве примера рассмотрен метод оценки размножения ошибок (РО) для самортогональных кодов (СОК), состоящий в том, что с помощью многомерных производящих функций вероятности (ПФВ) вычисляются оценки вероятности появления одиночных ошибок и пакетов на выходе ПД. Этот метод помогает при отборе кодов, в наименьшей степени подверженных влиянию РО, что принципиально улучшает характеристики МПД.

Пусть в двоичном симметричном канале (ДСК) задана вероятность ошибки p_0. Выберем в некотором СОК первый информационный символ i_0 и другой произвольный информационный символ $i_m, m > 0$. Для каждого из них можно перечислить те компоненты синдрома $\bar{S}$, которые образуют множество ортогональных проверок и подаются при декодировании на пороговый элемент (ПЭ) обычного ПД. Пронумеруем эти проверки от 1 до **J=d-1**. Если при этом какой-то символ $s_n \in \bar{S}$ будет поступать на ПЭ в обоих случаях, то он будет иметь два различных номера, соответствующих символам i_0 и i_m.

Рассмотрим теперь все информационные и проверочные символы, входящие в проверки хотя бы относительно одного из i_0 или i_m. Пусть необходимо построить верхнюю оценку совместной вероятности ошибки обычного ПД в двух символах i_0 и i_m: $P(\xi_0 = 1, \xi_m = 1)$.

Тогда, аналогично одномерному случаю вычисления вероятности ошибки в первом символе $P_1(e)$ в обычном ПД, получаем, что для любого $i_k, k \geq m$, ошибка в котором входит в качестве слагаемого в *n*-ю проверку относительно i_m и в *l*-ю проверку относительно i_m, производящая функция вероятности (ПФВ) принимает вид $A_{nl}(x,y) = p_0 x_n y_l + q_0$. Если ошибка в некотором i_k входит в проверки только относительно i_0 или i_m, то ПФВ приобретает одномерный вид: $A_n(x) = p_0 x_n + q_0$ или соответственно. Для проверочных символов, которые входят в качестве слагаемых только в проверки относительно одного из i_0 или i_m, одномерные ПФВ имеют такой же вид. Так как мы рассматриваем случай ошибок в ПД в i_0 и i_m, то в том (единственном, потому что код – самоортогональный!) проверочном символе (если он есть), который соответствует проверке, участвующей в решении ПД относительно и i_0 , и i_m, следует учесть, что через обратную связь с порогового элемента (ОС) в эту проверку поступает собственная ошибка ПД. ПФВ для этого символа имеет вид $A_{nl}(x,y) = p_0 x_n + q_0 y_l$.

Наконец, последнее правило, которое необходимо выполнить при выводе оценки появления двух ошибок ПД, состоит в том, что относительно всех информационных символов $i_k, 0 < k < m$, предполагается, что при их декодировании через ОС в регистр синдрома S поступает истинное значение ошибки в i_k. Поэтому ошибки в этих символах при декодировании i_m отсутствуют. Такой гипотетический ПД называется декодером с «джином».

В данном случае описание поведения ПД через свойства такого особого декодера позволит проще получить необходимые оценки для рассматриваемого традиционного мажоритарного декодера.

Отметим также, что если мы рассматриваем вероятность двух ошибок в соседней паре символов i_0 и i_1, то никаких дополнительных предположений о декодировании с "джином" не требуется.

Введем теперь правило перемножения многомерных ПФВ. Оно состоит в том, что показатели степени при x_n и y_l с одинаковыми индексами складываются по mod 2. Таким образом, все показатели степени при x_n и y_l имеют только значения 0 или 1. Это связано с тем, что значения проверок могут быть только 0 или 1, а ошибки, относящиеся к одинаковым проверкам, имеют одинаковые индексы и сумма по mod 2 четного числа ошибок равна 0.

В результате перемножения всех ПФВ получаем сумму $A_{0m}(x,y) = \sum a_{n_1 n_2 \ldots n_d, k_1 \ldots k_d} x^{n_1+n_2+\ldots+n_d} y^{k_1+\ldots+k_d}$ из $\mathbf{2^{2d}}$ слагаемых. Коэффициенты а…. с **2d** индексами, где n_i и k_i равны 0 или 1, являются вероятностями значений проверок, определяемых этими индексами. Например, при **d=5** коэффициент $a_{01000,10000}$ равен вероятности того, первая проверка относительно $\mathbf{i_0}$ равна 1, а остальные равны 0. Здесь и далее мы будем считать, что первый индекс в группе относится к значению декодируемого символа. Так, например, во второй группе индексов их значения указывают на то, что **а…… .** равно совместной вероятности описанной комбинации проверок для символа i_0 и ошибке канала $\mathbf{e_m}$=1 в

i_m при правильных остальных проверках относительно **i$_{\mathbf{m}}$**. После получения рассмотренных коэффициентов в результате суммирования тех из них, для которых в каждой группе индексов сумма единиц больше **T**, получаем оценку $P(\xi_0 = 1, \xi_m = 1)$ для ПД с «джином», поскольку сумма коэффициентов **а…..** равна вероятности всех возможных сочетаний ошибок в символах **i$_{\mathbf{o}}$** , **i$_{\mathbf{m}}$** и проверок, приводящих к ошибкам декодирования.

Например, для свёрточного кода СОК с R=1/2, порождающим полиномом в виде степеней при ненулевых элементах G=(0,1,4,6) и кодовым расстоянием d=5 результирующая ПФВ для **i$_{\mathbf{o}}$** и **i$_{\mathbf{1}}$** имеет вид

$$A_{01}(x,y) = (p_0x_0 + q_0)(p_0x_1 + q_0)(p_0x_2 + q_0y_1)(p_0x_2y_0 + q_0)(p_0x_3y_4 + q_0)\times$$
$$\times(p_0x_3y_3 + q_0)(p_0x_3 + q_0)(p_0x_4y_2 + q_0)(p_0x_4y_3 + q_0)(p_0x_4y_4 + q_0)\times$$
$$\times(p_0x_4 + q_0)(p_0y_2 + q_0)(p_0y_3 + q_0)(p_0y_4 + q_0)(p_0y_4 + q_0).$$

Здесь мы также полагаем, что для ошибок в i_0 и i_1 выбраны нулевые индексы, а нумерация проверок от 1 до 4 выполнена в соответствии с нумерацией проверок в проверочной матрице этого кода сверху вниз.

После суммирования коэффициентов согласно указанным на предыдущей странице правилам и критериям выбора коэффициентов разложения а……. можно получить, что при **p$_{\mathbf{0}}$**<<1 $P(\xi_0 = 1, \xi_1 = 1) \approx 26p_0^3$, а $P(\xi_0 = 1, \xi_i = 1) \approx 8p_0^3$, если $2 \le i \le 4$. При **i**>4 эти вероятности уже имеют порядок $\mathbf{p_0}^{\mathbf{4}}$, и поэтому при не очень высоких уровнях шума их вклад в РО невелик. Тогда верхняя оценка вероятности появления пакета веса 2 и более $P(\xi_0 = 1{,}1)$ равна при малом шуме

$$P(\xi_0 = 1{,}1) = \sum_{i=1}^{4} P(\xi_0 = 1, \xi_i = 1) = 50p_0^3. \qquad (1)$$

Так как можно проверить, что вероятность ошибки в первом символе рассматриваемого кода $P_1(e) = 85p_0^3$, то нижняя оценка вероятности одиночной ошибки в первом символе может быть представлена в виде

$$P_H(\xi_0 = 1{,}0) = P_1(e) - P(\xi_0 = 1{,}1) = 35p_0^3\ . \qquad (2)$$

Поскольку вероятность $P(\xi_0 = 1, \xi_1 = 1)$ выше была вычислена точно, то вероятность появления одиночной ошибки оценивается сверху при малом шуме как $P_B(\xi_0 = 1{,}0) = P_1(e) - P(\xi_0 = 1, \xi_1 = 1) = 59p_0^3$. Следовательно, вероятность появления одиночной ошибки ПД с «джином» лежит в диапазоне $(35 \div 59)p_0^3$.

Теперь заметим, что в тех случаях, когда ПД с «джином» не ошибается ни в одном символе $i_k, 0 < k < k = n_A R$, в пределах длины кодового ограничения, ПД также не совершает ни одной ошибки, так как решения «джина» совпадают с решением ПЭ. Но именно для таких последовательностей ошибок канала получена оценка (2). Значит, она справедлива и для обычного ПД.

Возможность оценивать вероятность появления двух ошибок в пределах длины кодового ограничения позволяет обобщить этот метод на пакеты ошибок декодирования любого веса. При этом оказалось, что для обеспечения высокой эффективности МПД, определяемой эффектом РО, достаточно рассматривать пакеты веса 3. В этом случае приходится производить расчеты в пространстве переменных размерности $\mathbf{2^{3d}}$. Но при анализе кодов с d≥7 и более эта задача слишком сложна для непосредственных вычислений.

Поэтому были разработаны специальные методы значительного упрощения вычислений вероятностей появления пакетов, которые затем позволили сформулировать комплекс из приблизительно 20 критериев, по которым необходимо строить длинные коды с очень малыми вероятностями появления пакетов ошибок декодирования. Соответствующие программы при построении таких кодов длины **n** выполняют порядка $\mathbf{n^4}$ операций, что позволяет достаточно быстро строить очень эффективные коды до длин порядка **n**=300'000 битов.

Поскольку при декодировании вблизи пропускной способности канала возможно применение только очень длинных кодов, разработка описанных выше методов построения кодов полностью решила проблему выбора кодов для высокоэффективных декодеров класса МПД для каналов с большим шумом.

Таким образом, одновременное решение задачи усовершенствования ПД, который превратился в МПД, осуществляющий процесс поиска глобального экстремума на очень большом множестве целочисленных переменных, а также исчерпывающее решение задачи анализа эффекта РО, что привело к построению совершенно новых кодов с малым уровнем размножения ошибок, позволило построить новый простейший, но очень эффективный алгоритм декодирования. Как следует из экспериментальных результатов по моделированию эффективных декодеров специально построенных кодов, МПД - очень мощный метод коррекции ошибок, который способен почти всегда находить оптимальные решения при весьма высоких уровнях шума канала.