

ОПТИМИЗАЦИОННАЯ ТЕОРИЯ КОДИРОВАНИЯ: ИТОГИ 25 ЛЕТ РАЗВИТИЯ

член-корр. РАН Зубарев Ю.Б.¹, д.т.н., проф. Золотарёв В.В.²,
д.т.н., проф. Овечкин Г.В.³, к.т.н., доц. Овечкин П.В.³

¹Московский научно-исследовательский телевизионный институт

²Институт космических исследований

³Рязанский государственный радиотехнический университет

Обсуждается оптимизационная теория кодирования, являющаяся основой для разработки многопороговых методов декодирования (МПД) самоортогональных кодов. Сравняются возможности МПД с эффективностью наиболее эффективных методов коррекции ошибок, таких как классические декодеры Витерби для сверточных кодов, а также декодеры турбо и низкоплотностных кодов. Показано, что разработанные на сегодняшний день двоичные МПД в гауссовских каналах обеспечивают сопоставимую, а в некоторых случаях даже лучшую эффективность по сравнению с практически реализуемыми методами декодирования при в десятки раз меньшей вычислительной сложности. Обсуждаются известные методы декодирования символьных кодов. Показано, что разработанные символьные МПД, обладающие линейной от длины кода вычислительной сложностью, не зависящей от размера символа, обеспечивают исправление значительно большей доли символьных ошибок по сравнению с другими методами. Представлены результаты по эффективности методов коррекции ошибок в каналах со стираниями. В таких условиях МПД алгоритм демонстрирует свою успешную работу при отношении $R/C \sim 0,96$ и более, что является уникальным достижением для алгоритмов восстановления стираний. Обсуждаются основные сложности в современной теории кодирования и выделяются перспективные направления развития оптимизационной теории кодирования.

В 2015 году исполнилось 25 лет со дня защиты диссертации [1], в которой для очень простых по сегодняшним меркам кодов были доказаны многие основные результаты, которые позднее были систематизированы и представлены в полном объеме в оптимизационной теории кодирования [2, 4, 6–9, 12, 14]. На основе развития идей мажоритарного декодирования [5] оптимизационная теория позволила иначе взглянуть на проблему итеративной коррекции ошибок декодирования, исходные методы которого были запатентованы ещё в 1972 г. [11].

В настоящее время все основные этапы проектирования и исследования многопороговых методов декодирования (МПД) проводятся на основе оптимизационных процедур, роль и сложность которых быстро растут. При этом сложность самого метода МПД остаётся минимальной, линейно растущей с длиной кода. Но с увеличением числа итераций характеристики МПД непрерывно улучшаются и при весьма небольшой сложности по сравнению с другими методами практически во всём диапазоне интересных для техники связи параметров уже стали лучше, чем у прочих алгоритмов. Оптимизация ведётся по десяткам и тысячам критериев при построении кодов с малым размножением ошибок, которые используются в МПД, настройке параметров МПД (порогов, весов проверок и т.д.), а также при собственно моделировании работы МПД в различных каналах. Это и позволяет считать оптимизационную теорию основой методов МПД и всех алгоритмов на их основе.

Рассмотрим характеристики основных алгоритмов декодирования в гауссовском канале при кодовой скорости $R=1/2$, представленные на рис. 1. На нем показаны зависимости вероятности ошибки на бит $P_b(e)$ различных алгоритмов декодирования в традиционном виде как функции от уровня битовой энергии канала, т. е. его уровня шума. Вертикаль $C=1/2$ отмечает уровень шума, при котором пропускная способность канала C равна кодовой скорости $C=R=1/2$. Пунктир P_0 показывает вероятность ошибки при отсутствии кодирования. Граница АТ указывает на предельные пока возможности турбо кодов, которые, однако, до сих пор нереально воплотить в характеристики аппаратуры из-за сложности алгоритмов этого класса. Кривая VA:K7 отражает возможности повсеместно применяемого алгоритма Витерби (AB) для сверточных кодов с длиной кодирующего регистра $K=7$. График CC:VA*RS соответствует каскадной схеме на основе AB и кода Рида-Соломона. Кривая LDPC приведена для min-sum

декодера LDPC кода стандарта DVB-S2 длиной 64800 битов, реализованного в 2012 году в НИИР [18]. График TR представляет реальные возможности декодера для турбо кода длиной 3060 битов стандарта CDMA2000.

Рассмотрим далее возможности многопороговых алгоритмов. График MTD1 показывает новое достижение алгоритма, который оптимально декодирует длинный код при очень низкой энергетике гауссовского канала 1,3 дБ, когда до его пропускной способности оказывается всего 1,1 дБ. Для работы декодера требуется не более $I=160$ итераций. По мере развития исследований количество итераций декодирования непрерывно снижается. Однако это не быстрый процесс. Величина задержки декодирования при свёрточном кодировании составляет менее 6 Мбитов. Эта величина также понемногу уменьшается. Снижение допустимого уровня шума канала всего на несколько десятых децибела, естественно, сильно упрощает МПД алгоритм. Так, график MTD2 показывает возможности этого метода уже всего при $I=60$ итерациях и задержке решения свёрточного декодера менее 1 Мбита. А последний декодер, представленный на графике MTD3, обладает ещё и тем важным свойством, что его возможности в самом обычном некаскадном формате свёрточного декодирования оказываются лучше, чем у весьма мощной каскадной схемы (AV*PC). Этот декодер реализует 40 итераций и имеет задержку всего лишь втрое большую, чем сравниваемая с ним каскадная схема.

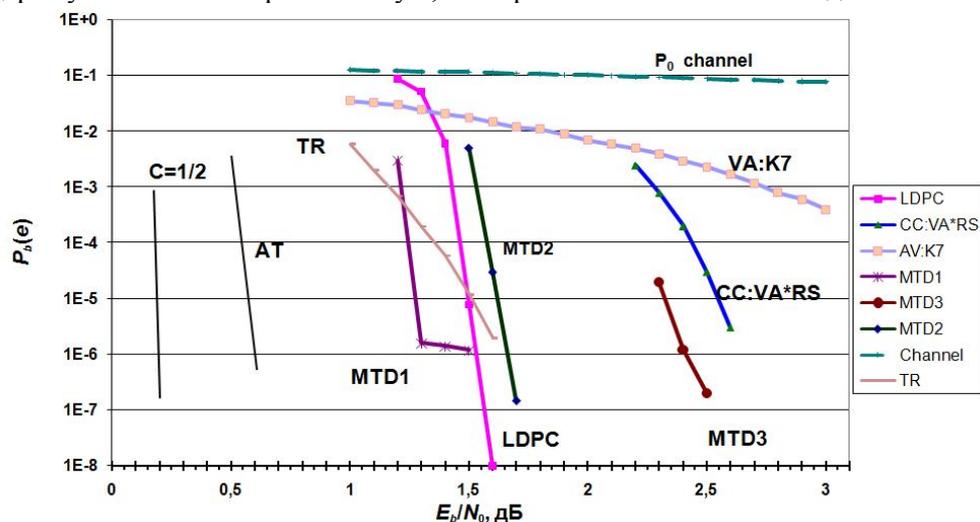


Рис. 1. Характеристики современных методов коррекции ошибок в гауссовском канале

Укажем на основные преимущества всех представленных методов МПД перед прочими алгоритмами. AV не является для МПД конкурентом в области столь высокого уровня шума канала. Каскадная схема с AV тоже находится на границе рисунка и также не участвует в конкурсе методов. Возможности первого МПД по эффективности декодирования при большом уровне шума уже являются недостижимыми для всех известных на текущий момент алгоритмов. Но опыт разработки МПД свидетельствует, что для МПД есть ещё некоторая возможность улучшения его характеристик. Для дальнейшего существенного продвижения в сторону предела Шеннона $R=C=1/2$ или для других кодовых скоростей, конечно, потребуется уже значительная модернизация МПД, которая уже готовится. Добавим далее, что при равном числе итераций для МПД это гораздо более простая процедура, чем, например, для LDPC декодера. Кроме того, структура связей между ячейками в аппаратном МПД декодере много проще, чем у прочих алгоритмов. МПД более, чем на 99% состоит из памяти на регистрах сдвига, что дополнительно облегчает его создание и отладку. И, наконец, укажем на то, что, согласно [13], все МПД алгоритмы могут быть реализованы аппаратно так, что они становятся как бы однократной решающей схемой мгновенного действия. А это приводит к тому, что, как и все алгоритмы, МПД декодеры создают задержку решения, но они совершенно не снижают

скорость работы любого устройства, в котором они работают. Конечно, при этом должен использоваться свёрточный код. Вопросы реализации блочного кодирования с экстремально большой производительностью алгоритмов мы здесь опустим. Такое свойство свёрточного МПД естественно назвать максимальной аппаратной теоретической производительностью. Простота и высокая скорость работы МПД алгоритмов хорошо иллюстрируется демопрограммами на ресурсах [14]. Например, МПД на персональном компьютере с процессором Intel Core i7 декодирует свёрточный код при большом шуме гауссовского канала со скоростью более 15 Мбит/с. Ко всем демопрограммам приложены детальные инструкции.

В высшей степени ценным для различных прикладных систем кодирования стало открытие нашей научной школой символьных кодов [2, 4, 6–8, 14]. Строго говоря, Дж. Месси рассмотрел эти коды и доказал теоремы 1–4 для них в [5]. Но он очень негативно оценил возможности этих кодов в разделах 1.2, 6.2, 6.5, 6.6 и 8.2 этой же книги и больше не занимался этой темой. И нам неизвестны сколько-нибудь содержательные работы по мажоритарному декодированию недвоичных кодов, а тем более, публикации по итеративным алгоритмам для них. Символьные коды сразу решили все проблемы высоконадёжного хранения цифровых данных на много лет вперёд, и они могут заменить коды Рида-Соломона во всех возможных приложениях, выигрывая у них и у других потенциальных конкурентов все конкурсы по достоверности и быстрдействию [2, 6–8, 14]. Ограничимся указанием на то, что сейчас свёрточный символьных декодер QМПД эффективно декодирует цифровой поток при вероятности ошибки в канале до $P_0=0,3$ при $R=1/2$. И это будет ещё очень долго недоступно любым другим методам. Опубликованные более 30 лет назад символьные коды не имеют ни одного отклика за рубежом. Мы полагаем, что среди множества причин этого может быть весьма новая математика оптимизационной теории, ранее не существовавшая в работах зарубежных специалистов по кодам. Важнейшие результаты по символьным кодам изложены в [2, 4, 6, 14]. Эта тематика активно развивается и сейчас. Представленные в [14] демопрограммы для символьных кодов показывают при большом уровне шума производительность QМПД, превышающую на тех же процессорах Intel Core i7 уровень 30–50 Мбитов/с.

Укажем далее, что все основные характеристики всех направлений разработки МПД к настоящему времени выполнены уже для достаточно широкого диапазона кодовых скоростей. В частности, все свойства МПД и их соотношение с возможностями других алгоритмов, сохраняются и в области кодовых скоростей порядка $R\sim 4/5$. Это позволяет рекомендовать методы МПД для самого широкого применения. Например, в [3] рассмотрены методы высокоскоростного декодирования при $R=4/5$ для оптических каналов полученные нашей научной школой и зарубежными авторами, которых мы консультировали. Результаты российских исследователей были существенно лучше.

Наконец, укажем, что нами успешно завершена разработка методов декодирования для ненадёжной флеш-памяти. Специфика этой проблемы состоит в том, что вероятность ошибки на бит для таких систем должна быть не хуже $P_b(e)\sim 10^{-15}$. Найденные нами технические решения на основе МПД алгоритмов позволили довольно просто решить эту проблему [17]. Столь же простые и одновременно эффективные результаты по сверхдостоверному декодированию у других разработчиков нам неизвестны.

Обратимся ещё к одной области теории кодирования, которая является уникально простой и удобной для исследований и получения содержательных результатов. Однако до применения к ней методов МПД – мы имеем в виду стирающие каналы – результаты в этой области были крайне скромны у всех методов. Основной причиной этого было, конечно, гораздо большее внимание специалистов именно к каналам с ошибками. Собственно поэтому декодеры для стирающих каналов были как бы в тени, а их характеристики далеки от допускаемых теорией пределов эффективной работы. Ограничимся только кратким рассмотрением тех характеристик МПД, которые получены недавно и представлены на рис. 2. Для сравнения на нём указаны возможности по восстановлению стираний для кодов РС длины $n=256$ символов при $R=1/2$ (кривая RS05) и $R=4/5$ (кривая RS45).

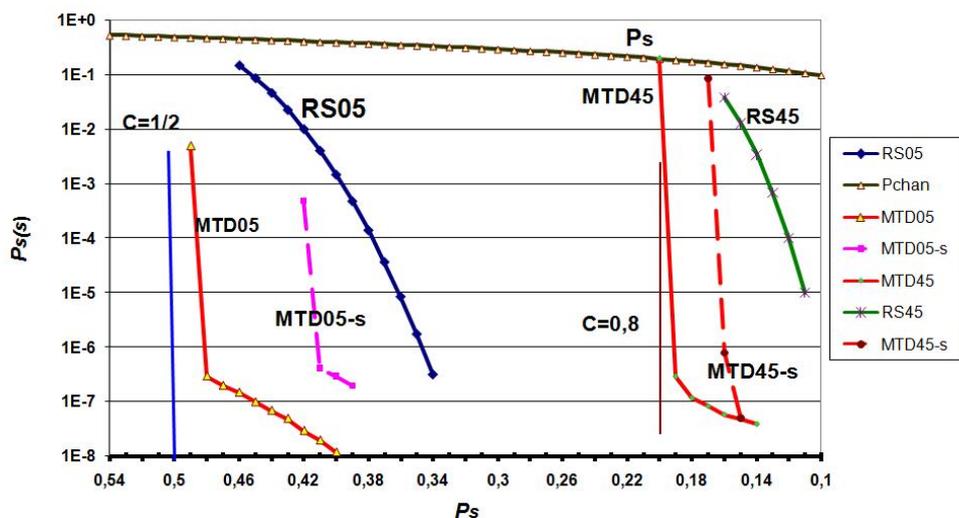


Рис. 2. Характеристики современных методов коррекции ошибок в канале со стираниями

Для восстановления стираний методами МПД [2, 4, 14–16] при $R=1/2$ был построен код с особенно малым группированием ошибок и стираний после декодирования с минимальным кодовым расстоянием $d=21$. Задержка принятия решения равна около 70000 информационных символов, длина кодового ограничения $n_d=103200$ кодовых символов, а число итераций восстановления стираний не превышает 90. Этот МПД, как следует из графика его эффективности MTD05, восстанавливает поток стёртых символов с вероятностью 0,48 до уровня вероятности невосстановленных символов $P_s(s) \sim 3 \cdot 10^{-7}$. Как известно, для каналов с независимыми стираниями пропускная способность $C=1-P_s$, где P_s – вероятность стирания в канале. Таким образом, МПД алгоритм демонстрирует свою успешную работу при отношении $R/C \sim 0,96$, что является уникальным достижением для алгоритмов восстановления стираний. При этом скорость работы МПД равна 95 Ксимв/с. Отметим, что код РС при столь высоком уровне искажений, как это видно из графика RS05 для этого кода при $R=1/2$, совершенно неработоспособен, что не требует обсуждения скорости работы декодера для кода РС. Отметим, что даже небольшое улучшение качества канала, как и при исправлении ошибок, сильно уменьшает размеры МПД и повышает его и так достаточно высокое быстродействие. В частности, МПД свёрточного кода для $P_s \leq 0,4$, отмеченный на рис. 2 как MTD05-s, оказывается уже в 7 раз более быстрым, чем первый декодер, потому что ему требуется почти в 5 раз меньшее число итераций, а его задержка оказывается в 9 раз меньше. Подчеркнём, что остаточная доля невосстановленных символов у второго гораздо более простого МПД также на много десятичных порядков меньше, чем у кода РС.

Рассмотрим возможности методов исправления стираний для высокоскоростных кодов при $R=4/5$, которые представлены на правой части рис. 2. Кривая RS45 соответствует коду РС, а вертикаль $C=0,8$ показывает значение пропускной способности при $P_s=0,2$. Рассмотрим возможности МПД декодера, обозначенного как MTD45. Он восстанавливает исходный цифровой поток с долей стёртых символов $P_s \leq 0,19$ до уровня оставшихся невосстановленных символов $P_s(s) < 5 \cdot 10^{-7}$ при 180 итерациях декодирования с задержкой ~ 2 Мсимв. Самое главное, что для этого декодера справедливо отношение $R/C=0,8/0,81 \approx 0,988$, что абсолютно не доступно для других алгоритмов, в том числе и представленного на рис. 2 кода РС, график RS45. Очевидно, что столь непосредственная близость параметров R и C неизбежно влечёт для этого кода его большую длину, что и указано выше. При этом МПД имеет очень высокую скорость, около 300 Ксимв/с. А если размер стёртых символов меняется, то алгоритм МПД, не меняющий скорость работы демо программы на обычных ПК, при изменении размера алфавита в пределах до 4 байтов увеличивает скорость декодирования до 32·300 Ксимв/с=9,6 Мсимв/с. При этом

сложно указать другие какие-либо методы, которые будут работать при столь большом уровне шума.

График MTD45-s показывает возможности МПД алгоритмов при весьма небольшом снижении уровне шума. Как и в случае этого же алгоритма при $R=1/2$, оказывается, что вносимая задержка декодирования и число итераций коррекции ошибок уменьшаются в 5–7 раз, а скорость работы увеличивается не менее, чем в 3–4 раза. И это тоже на несколько десятичных порядков по итоговой достоверности лучше, чем у кодов РС.

Вышеизложенные результаты и сопоставление основных методов декодирования помехоустойчивых кодов позволяют прийти к выводу, что современная нам теория кодирования последние десятилетия находилась в кризисной стадии, аналогичной завершению основного периода развития классической физики в конце XIX века. К этому времени неразрешимые на основе методов старой физики проблемы излучения абсолютно чёрного тела, фотоэлектронной эмиссии, а также особенностей описания многих других явлений стали серьёзными препятствиями для развития физики, поскольку они показывали наличие важного несоответствия взглядов науки на физику нашей части Вселенной и её реальных свойств. Великие физики начала XX века ввели ряд постулатов и угадали новые уравнения, описывающие наш мир. Многие из них за эти работы стали нобелевскими лауреатами.

Теория кодирования прошлого века предложила ~30 лет назад последнюю хорошую каскадную схему с АВ и кодами РС. Но затем даже технологические революции в элементной базе не помогли указать устойчивые направления дальнейшего развития техники кодирования. Турбо коды, как оказалось, были сложны и нетехнологичны, а LDPC коды дают неплохие результаты, но трудно реализуемы на больших скоростях. Кроме того, заметные трудности у этих методов возникают при их использовании со свёрточными кодами. Ещё большая кризисность характеризовала тематику недвоичных кодов, для которых за 50 лет развития ничего лучше кодов РС вообще создано не было.

Оптимизационная теория и её основная теорема МПД, а также символные коды, теория размножения ошибок и другие ключевые результаты нашей научной школы полностью преобразили всю технологию декодирования. Эти новые подходы на несколько десятичных порядков снизили сложность открытых теорией итеративных мажоритарных алгоритмов и повысили их энергетическую эффективность до оптимального уровня, ранее доступного только переборным методам. Строгое стремление алгоритма МПД на всех шагах коррекции символов к оптимальному решению, гарантируемое основной теоремой, правильная в большинстве случаев коррекция ошибок далеко за половиной кодового расстояния в символных кодах и другие новые важнейшие принципы разработок алгоритмов декодирования выполнили для теории кодирования такую же роль, как и новые постулаты квантовой механики. Это позволяет выразить уверенность в том, что работы российской научной школы по теории кодирования преодолели долговременный кризис теории и на основе научно-идеологической революции, сменившей значительную часть основных парадигм теории кодирования, создали условия для её развития на совершенно новых основах. Можно сказать, что в теории кодирования сформировалась своя "квантовая механика". Она трудна, но плодотворна. Других путей пока нет.

Новый уровень развития теории МПД алгоритмов и оптимизационной теории позволяет охарактеризовать текущую ситуацию в теории информации как переход теории помехоустойчивого кодирования и её технологий разработки новых методов декодирования в новую более совершенную фазу развития на основе оптимизационной теории. Как показывает наш опыт, она уже сейчас обеспечивает достижение новых высот в столь трудной для исследований и важной для техники связи сфере. Её применение уже позволило привлечь внимание специалистов на новые возможности методов кодирования, обеспечивающие эффективную работу декодеров при весьма умеренной их сложности в каналах с большим уровнем шума. В первую очередь это использование принципов дивергентного кодирования, которые рассмотрены детально в [10]. Он состоит в некаскадном постепенном увеличении кодового расстояния применяемых кодов. Другое масштабное направление в прикладной теории кодирования создано совместным применением МПД, QМПД и АВ алгоритмов,

которые образуют небольшую, но чрезвычайно эффективную группу методов с прямым контролем метрики. Как известно, только эти алгоритмы характеризуются тем, что они точно измеряют расстояние своих решений до принятого сообщения. Этим и определяется их высочайшая эффективность в каналах с большим уровнем шума. Все прочие известные методы или вообще не оценивают этот главный параметр декодирования (алгебраические алгоритмы), или вычисляют только некоторые относительно полезные функции от расстояний, что весьма усложняет их работу и уменьшает эффективность (турбо, LDPC и др.). Именно это определяет важность группы методов прямого контроля метрики, у которых есть большие перспективы развития, в том числе и при совместном применении.

Авторы понимают свою ответственность мировых лидеров за разработку эффективных методов кодирования и продолжают свои усилия по дальнейшему развитию порталов www.mtdbest.ru и www.mtdbest.iki.rssi.ru, содержащих более 300 блоков данных, включающих полезные научные, методические и учебные материалы. На них представлено также и множество демопрограмм всех популярных в настоящее время алгоритмов коррекции ошибок почти десятка типов. Несомненно, наши двуязычные порталы будут и дальше способствовать развитию теории и техники кодирования в нашей стране и за рубежом. Крайне значимым критерием признания оптимизационной теории во всём научном мире является статистика посещений наших порталов читателями. Ежегодно их просматривают около 100'000 пользователей сети из более чем 50 стран мира. Появляются и статьи по этой тематике, но их число пока невелико. Мы как лидеры оказываем коллегам поддержку, но зарубежье слишком сильно погрузилось в разработку тупиковых направлений техники декодирования. Поэтому теоретическое освоение и получение прикладных результатов на основе оптимизационной теории у зарубежных коллег отстаёт от российских достижений, возможно, на 15–20 лет. Некоторые наши результаты, опубликованные более 30 лет назад, до сих пор не имеют вообще никакого отклика из зарубежья, хотя касаются принципиальных научных проблем, которые там решают очень сложными методами.

Исследования в области оптимизационной теории кодирования поддерживали: МФТИ, ИППИ РАН, концерн "Созвездие", Совет по кибернетике АН СССР, ОНИТ РАН, РГРТУ, НИИ Радио, МНИТИ, ИКИ РАН. Методы МПД тестировали ООО "ОРТ", НПО им. С.А. Лавочкина, а также ряд организаций и предприятий отрасли связи. Разработки методов МПД также финансово поддержаны РФФИ (гранты 14-07-00859, 14-07-00824, 08-07-00078 и 05-07-00024) и грантом Президента РФ (грант МД-639.2014.9).

Литература

1. Золотарёв В.В. Субоптимальные алгоритмы многопорогового декодирования // Докторская диссертация. М., 1990. 278 с.
2. Золотарёв В.В., Зубарев Ю.Б., Овечкин Г.В. Многопороговые декодеры и оптимизационная теория кодирования. // Под редакцией академика РАН В.К. Левина. М.: «Горячая линия – Телеком», 2012. 238 с.
3. Золотарёв В.В., Овечкин Г.В. Применение многопороговых методов декодирования помехоустойчивых кодов в высокоскоростных системах передачи данных // Электросвязь, М., 2014. №12. С.10–14.
4. Кузнецов Н.А., Золотарёв В.В., Овечкин Г.В., Овечкин П.В. Недвоичные многопороговые декодеры и другие методы коррекции ошибок в символьной информации // Радиотехника, №6, вып. 141, 2010. С.4–9.
5. Месси Дж. Пороговое декодирование // Пер. с англ. Ю.Л. Сагаловича под ред. Э.Л. Блоха – М.: Мир, 1966. 208 с.
6. Овечкин Г.В. Теория каскадного декодирования линейных кодов для цифровых радиоканалов на основе многопороговых алгоритмов. Докторская диссертация. Рязань, 2011. 301 с.

7. Овечкин П.В. Разработка алгоритмов повышения эффективности недвоичных многопороговых декодеров в системах передачи и хранения больших объемов информации. Кандидатская диссертация. Рязань, 2009. 131 с.
8. Zolotarev V.V., Averin S.V. Non-Binary Multithreshold Decoders with Almost Optimal Performance – 9-th ISCTA'07, July, UK, Ambleside, 2007.
9. Averin S.V., Ovechkin G.V., Zolotarev V.V. Algorithm of multithreshold decoding for self-orthogonal codes over Gaussian channels – 11-th ISCTA'09, July, UK, Ambleside, 2009.
10. Золотарёв В.В., Овечкин Г.В. Дивергентное кодирование свёрточных кодов // тезисы докладов Межд. научно-техн. конф. «Проблемы передачи и обработки информации в сетях и системах телекоммуникаций» – Рязань, 2015.
11. А.с СССР № 492878.
12. Самойленко С.И., Давыдов А.А., Золотарёв В.В., Третьякова Е.Л. Вычислительные сети. М., «Наука», 1981. 278 с.
13. Патент РФ №2377722.
14. Ресурсы www.mtdbest.ru и www.mtdbest.iki.rssi.ru.
15. Золотарёв В.В. Многопороговое декодирование в стирающих каналах // Вопросы радиоэлектроники. Серия ЭВТ, вып. 10, 1983. С.67–70.
16. Гринченко Н.Н., Золотарёв В.В., Овечкин Г.В., Овечкин П.В. Применение многопорогового декодера в каналах со стираниями // Труды НТОРЭС им. А.С.Попова, 2006. С.338–340.
17. Овечкин Г.В., Золотарев В.В., Федиев В.С. Повышение достоверности хранения цифровых данных на флеш памяти // Материалы 6-й Международной научно-технической конференции «Космонавтика. Радиоэлектроника. Геоинформатика». – Рязань, 2013. С.201–203.
18. Овечкин Г.В., Чикин А.В. Помехоустойчивость приемника спутниковых сигналов DVB-S2 // 11-я межд. конф. и выст. «Цифровая обработка сигналов и ее применение». – М., 2009. С.578–580.

OPTIMIZING CODING THEORY: RESULTS OF 25 YEAR DEVELOPMENT

Zubarev J.B.¹, Zolotarev V.V.²,
Ovechkin G.V.³, Ovechkin P.V.³

¹Moscow Research Institute of Television

²Space Research Institute

³Ryazan State Radioengineering University

Optimizing coding theory is discussed. The theory is base for development of multithreshold decoders (MTD) for self-orthogonal codes. The possibilities of MTD is compare with performance of most effective known error correction methods such as classical Viterbi decoders for convolutional codes, decoders for turbo and low-density parity-check codes. It's shown the developed MTDs provide bit error rate performance similar to or even better the performance of used in communication systems decoders with much less computational complexity. The methods for symbol error correction are discussed. It's shown known MTD provide correction of more symbol errors in comparison with other methods. Yet computational complexity of symbol MTD is liners and isn't depend on symbol size. The results on performance estimation of error correction methods over erasure channels are presented. In the channels MTD provide effective erasures recovering at code rate to channel capacity ratio about 0,96 and upper. It is unique situation for erasure recovering algorithms. The main problems in coding theory is discussed and perspective ways for development of optimizing coding theory are noted.