

УДК 621.391:519.72

КОМБИНИРОВАННЫЙ ИМИТАЦИОННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОЦЕНКИ ВЕРОЯТНОСТИ ОШИБКИ В СИСТЕМЕ ПЕРЕДАЧИ ЦИФРОВЫХ ДАННЫХ С МНОГОПОРОГОВЫМ ДЕКОДЕРОМ

Д. С. Демидов, аспирант кафедры ВПМ, РГРТУ; dmitri-demidiv@yandex.ru

Г. В. Овечкин, д.т.н., профессор кафедры ВПМ, РГРТУ; g_ovechkin@mail.ru

Целью работы является решение задачи получения оценок эффективности многопорогового декодера самоортогональных кодов для малых вероятностей ошибок. Актуальность задачи определяется тем, что при вероятностях ошибки порядка 10^{-12} и менее оценка характеристик декодера с помощью моделирования из-за больших объемов эксперимента требует огромных временных затрат, а известные аналитические оценки оказываются слишком неточными. В работе предлагается комбинированный имитационно-аналитический метод оценки вероятности ошибки многопорогового декодера, обеспечивающий получение оценок вероятности ошибки при заданном уровне шума на основе обработки статистики работы декодера при большем уровне шума. Представленные результаты показали, что предложенный метод позволяет получить требуемые характеристики в сотни и более раз быстрее, чем при помощи компьютерного моделирования.

Ключевые слова: системы передачи данных, помехоустойчивое кодирование, многопороговый декодер, оптимальный декодер, самоортогональные коды, компьютерное моделирование, оценка вероятности ошибки, канал с гауссовским шумом.

Введение

Одной из основных проблем, с которой сталкиваются при разработке систем передачи и хранения данных, является проблема обеспечения безошибочности передачи данных по каналам с шумом. Для решения данной проблемы обычно применяются методы помехоустойчивого кодирования, в разработке которых в последние десятилетия имеются значительные успехи [1]. Одними из наиболее эффективных с точки зрения соотношения эффективности и сложности реализации являются многопороговые декодеры (МПД) самоортогональных кодов (СОК) [2, 3], которые всего лишь с линейной вычислительной сложностью обеспечивают близкое к оптимальному декодирование даже очень длинных кодов.

Для МПД к настоящему времени выполнен огромный объем исследований их эффективности в различных условиях применения [4-8]. Несмотря на это выбор и настройка параметров данного метода коррекции ошибок для обеспечения заданных требований в конкретной системе передачи и хранения данных является сложной научной задачей, в процессе решения которой исследователи для оценки характеристик применяемых методов вынуждены использовать компьютерное моделирование [9,10]. При этом в

ряде случаев возникает необходимость проведения очень больших объемов эксперимента для оценки характеристик методов коррекции ошибок при низких вероятностях ошибки декодирования (10^{-12} и менее), требующихся в современных системах передачи и хранения данных [11]. Существующее программное обеспечение для исследования эффективности МПД не позволяет за приемлемое время выполнить подобное исследование, а известные аналитические оценки оказываются слишком неточными, особенно при большом шуме в канале связи.

Таким образом, актуальной становится задача оценки эффективности МПД для малых вероятностей ошибки декодирования.

Для решения этой задачи в работе предлагается комбинированный имитационно-аналитический метод оценки вероятности ошибки МПД, обеспечивающий получение оценок вероятности ошибки при заданном уровне шума на основе обработки статистики работы декодера при большем уровне шума.

Многопороговое декодирование

МПД используется для декодирования блоковых или сверточных СОК. Принципы работы МПД, используемого для декодирования блокового СОК с кодовой скоростью $1/2$, заданного

порождающим полиномом $g(x)=1+x+x^4+x^6$, иллюстрируются схемой, представленной на рисунке 1 [2]. Отметим, что МПД является простейшим для реализации устройством, способным обеспечить предельно возможные скорости декодирования.

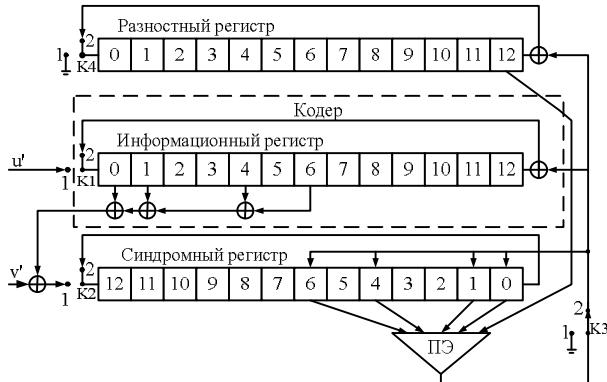


Рисунок 1 – Схема МПД блокового СОК

При работе МПД в двоичном симметричном канале (ДСК), в котором каждый бит искажается независимо от других с вероятностью p , на пороговом элементе для текущего декодируемого символа u_j вычисляется функция правдоподобия L_j , зависящая от элементов синдрома s_{jk} и соответствующего элемента разностного регистра d_j :

$$L_j = \sum_{s_{jk} \in \{S_j\}} s_{jk} + d_j,$$

где $\{S_j\}$ – множество проверок (элементов синдрома) относительно ошибки e_j в декодируемом символе u_j . При превышении функцией правдоподобия некоторого порога (в общем случае равного половине числа слагаемых) осуществляется изменение декодируемого символа, соответствующего элемента разностного регистра и участвующих в вычислении функции правдоподобия элементов синдрома.

При работе МПД в гауссовском канале для текущего символа u_j также вычисляется функция правдоподобия L_j . При этом элементы синдрома и элемент разностного регистра суммируются с некоторыми коэффициентами, отражающими их надежность:

$$L_j = \sum_{s_{jk} \in \{S_j\}} (2s_{jk} - 1)w_{jk} + (2d_j - 1)w_j,$$

где w_{jk} – коэффициент, отражающий надежность проверки s_{jk} ; w_j – коэффициент, отражающий надежность принятого символа u_j . В качестве оценок надежности принятых из канала символов можно использовать, например, логарифм отношения правдоподобия.

Постановка задачи

В [2] показано, что МПД с каждым измене-

нием декодируемого символа приближает собственное решение к решению оптимального (по максимуму правдоподобия) декодера. Для самородотональных кодов, декодируемых с помощью МПД, известна оценка вероятности ошибки их оптимального декодирования в канале с АБГШ при использовании двоичной ФМ, определяемая в соответствии с выражением:

$$P_b = \begin{cases} \sum_{i=(d+1)/2}^d C_d^{d/2} p^i (1-p)^{d-i}, & \text{для ДСК при нечетном } d; \\ \frac{1}{2} C_d^{d/2} p^{d/2} (1-p)^{d/2} + \sum_{i=(d/2)+1}^d C_d^i p^i (1-p)^{d-i}, & \text{для ДСК при четном } d; \\ Q(\sqrt{2dE_s / N_0}), & \text{для канала с АБГШ.} \end{cases}$$

где d – кодовое расстояние; p – вероятность ошибки в канале (для ДСК); E_s/N_0 – отношение сигнал/шум (для канала с АБГШ); $Q(x)$ – интеграл ошибок:

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Отметим, что оценки вероятности ошибки оптимального декодера (ОД) являются нижними оценками вероятности ошибки МПД, поскольку он при каждом изменении декодируемого символа всегда строго приближается к решению оптимального декодера. Вместе с тем данные оценки имеют приемлемую точность только для уровней шума в канале, когда МПД действительно способен работать как ОД.

Типичное поведение графика зависимости вероятности ошибки для МПД показано на рисунке 2 (кривая "simulate"). График условно можно разделить на три области. В первой области (при большом шуме) МПД практически не уменьшает канальную вероятность ошибки, т.е. он оказывается неэффективным. Во второй области – области «падения» вероятности ошибки (так называемая область водопада – waterfall region), вероятность ошибки быстро приближается к вероятности ошибки ОД (кривая "optimal"). В третьей области (области насыщения вероятности ошибки – ergor floor region) МПД работает почти как ОД.

Отметим, что для различных кодов и параметров декодера сильно отличаются скорость уменьшения вероятности ошибки в области водопада и то, насколько МПД может приблизиться к характеристикам ОД. Оценить эти характеристики с достаточной точностью можно только при помощи компьютерного моделирования изза высокой сложности получения аналитической

оценки вероятности ошибки МПД для большого шума. В случае необходимости оценки уровня шума, при котором МПД смогут обеспечить малые вероятности ошибки (порядка 10^{-12} и менее), использование компьютерного моделирования оказывается затруднительным (зачастую и невозможным) из-за необходимости выполнения очень больших объемов эксперимента, которые могут потребовать месяцы или даже годы работы современных ПК. Таким образом, **целью работы** является разработка метода оценивания данных вероятностей с приемлемой для практических приложений точностью.

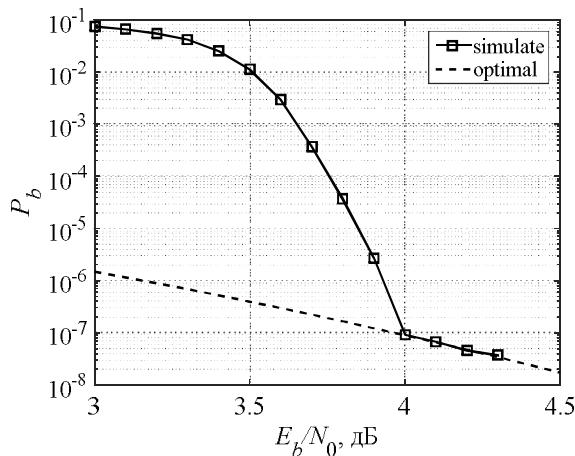


Рисунок 2 – Типичная зависимость вероятности ошибки декодирования от отношения сигнал-шум для МПД

Теоретические исследования

Эффективность работы МПД в канале с независимыми ошибками в основном определяется тем, насколько часто на вход декодера поступают блоки с большим для него числом ошибок. Другими словами, эффективность декодера зависит от распределения числа ошибок в принятых блоках. Отметим, что для канала с независимыми ошибками всегда можно подсчитать вероятность того, что в принятом из канала блоке будет заданное число ошибок. Данная вероятность определяется биномиальным распределением:

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}. \quad (1)$$

Здесь n – длина кодового блока; p – вероятность ошибки в канале с независимыми ошибками; k – число ошибок в блоке.

Для примера на рисунке 3 представлен график зависимости вероятности появления кодового блока с заданным числом ошибок от числа ошибок в нем для кода длиной 1000 бит и вероятностей ошибки 0,08 и 0,085.

Отметим, что для больших длин кода (тысячи, десятки тысяч битов) непосредственное использование выражения (1) оказывается практи-

чески невозможным из-за переполнения разрядной сетки ЭВМ при вычислениях. Поэтому вместо (1) для интересующих нас длин блока и вероятностей ошибки можно использовать приближение Муавра-Лапласа:

$$P(X = k) = \frac{e^{-\frac{x_k^2}{2}}}{\sqrt{2\pi np(1-p)}}, \quad (2)$$

где

$$x_k = \frac{k - np}{\sqrt{np(1-p)}}.$$

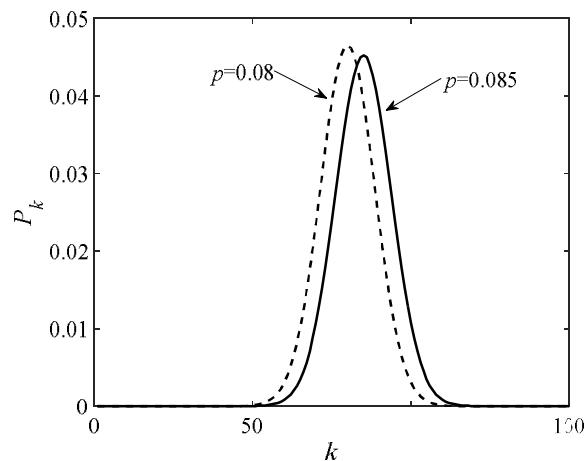


Рисунок 3 – Зависимость вероятности появления кодового блока с заданным числом ошибок от числа ошибок в нем для кода длиной 1000 бит

Отметим, что для этих графиков области числа ошибок, в которых блоки имеют большую вероятность, отличаются незначительно. Именно этот факт лежит в основе предлагаемого далее метода оценки вероятности ошибки декодирования МПД.

Пусть имеется некоторый СОК и настроенный на его декодирование МПД. Предположим, что вероятность ошибки оптимального декодирования данного кода при интересующем нас уровне шума настолько мала, что оценить ее с помощью моделирования за отведенное время невозможно. Тогда можно выполнить компьютерное моделирование системы передачи данных с МПД для несколько большего уровня шума (например, для шума, в котором вероятность ошибки декодирования составляет порядка 10^{-5}) и при этом шуме получить оценки вероятности ошибки в принятом блоке после декодирования для каждого из полученных в процессе эксперимента числа канальных ошибок в блоке. Т.е. в результате этого эксперимента будут получены оценки для всех возможных k (если во время эксперимента не было блоков с k ошибками, то соответствующая оценка $P_b^{(k)} = 0$).

Далее для интересующего нас шума (когда вероятность ошибки декодирования очень мала)

с помощью выражения (2) можно вычислить вероятности P_k появления на выходе декодера блока с k ошибками. После этого можно оценить вероятность ошибки МПД при этом шуме как

$$P_b = \sum_{k=0}^n P_k P_b^{(k)}.$$

Эта оценка с большой вероятностью будет несколько заниженной, но, как показывают представленные далее результаты экспериментов, вполне приемлемой для оценки возможностей МПД.

Экспериментальные исследования

На рисунке 4 представлены зависимости вероятности ошибки декодирования МПД (кривые с пометкой *simulate*) и ее комбинированные оценки (кривые с пометкой *estimate*) в канале с АБГШ при использовании двоичной ФМ от отношения сигнал-шум для кода с $R=1/2$, $n=7210$ и кодовым расстоянием $d=11$ при использовании как жестких (кривые с пометкой *hard*), так и мягких (кривые с пометкой *soft*) решений демодулятора. При получении комбинированных оценок проводился компьютерный эксперимент, во время которого передавалось 1000, 10000 и 100000 кодовых блоков. Уровень шума для жестких решений демодулятора был равен 4,1 дБ, а для мягких – 3,2 дБ. Как и следовало ожидать, чем больше объем эксперимента при получении оценок, тем точнее получаемые оценки. Отметим, что и для жестких, и для мягких решений демодулятора предложенный метод позволил получить хорошие оценки эффективности МПД при до 0,5 большем ОСШ, чем использовался при получении оценок. При использовании мягких решений демодулятора точность полученных оценок меньше, но они все равно подходят для оценивания эффективности МПД при до 0,3 дБ большем уровне шума, чем использовался при их получении.

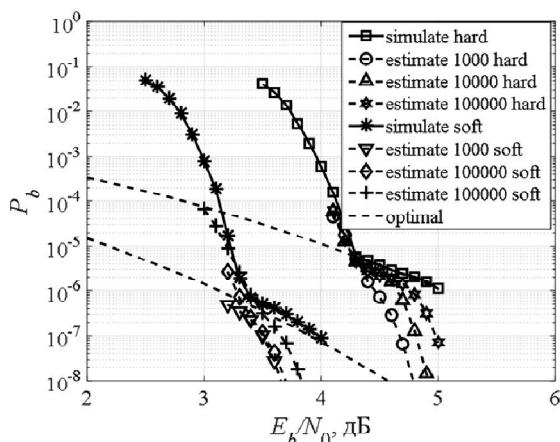


Рисунок 4 – Зависимость вероятности ошибки декодирования и ее оценки от отношения сигнал-шум для кода с $R=1/2$ и $d=11$

На рисунке 5 представлены зависимости вероятности ошибки декодирования МПД (кривые с пометкой *simulate*) и ее комбинированные оценки (кривые с пометкой *estimate*) в канале с АБГШ при использовании двоичной ФМ от отношения сигнала-шум для кода с $R=1/2$, $n=32000$ и $d=17$ при использовании жестких решений демодулятора. При получении комбинированных оценок проводился компьютерный эксперимент, во время которого передавалось 1000, 10000 и 100000 кодовых блоков. Уровень шума при получении оценок был равен 3,8 дБ и 3,9 дБ. Как и следовало ожидать, чем ближе ОСШ, при котором получается оценка, к ОСШ, при котором оценивается вероятность ошибки, тем более точную оценку можно получить. Отметим, что с помощью предложенного метода удалось определить начало области насыщения вероятности ошибки для МПД.

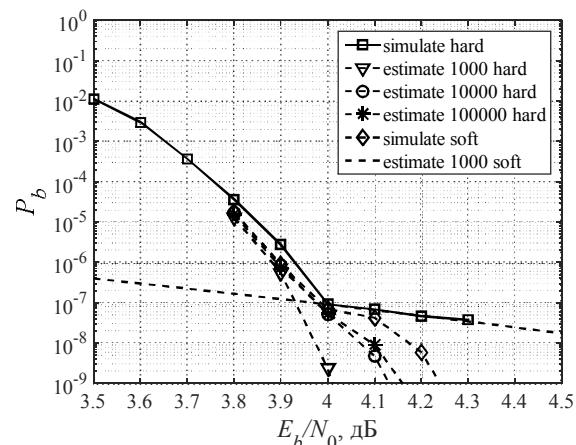


Рисунок 5 – Зависимость вероятности ошибки декодирования и ее оценки от отношения сигнал-шум для кода с $R=1/2$ и $d=17$

Далее получим комбинированные оценки вероятности ошибки для уровней шума, при которых не удается получить оценки вероятностей ошибки с помощью компьютерного моделирования. Рассмотрим случай использования МПД для коррекции ошибок на флеш-памяти, обсуждаемый в [11]. В данной статье делается предположение, что МПД для кода с кодовой скоростью $3/4$, длиной 32000 битов и кодовым расстоянием 17 должен обеспечить почти оптимальное декодирование при вероятности ошибки в канале порядка 0,011..0,012. При получении результатов в данной работе был построен аналогичный код с такими же параметрами. Результаты его компьютерного моделирования, представленные на рисунке 6 кривой *simulate*, получены за сутки работы ПК с процессором Intel Core i7. При этом для последней точки на выходе декодера не было получено ни одной ошибки декодирования. Для оценки вероятности ошибки

при меньшем шуме использовался предложенный метод. При этом статистика получалась при уровне шума, соответствующем 5 и 5,1 дБ, и по каналу передавалось по 10000 и 500000 кодовых блоков. Отметим, что данные оценки показывают, что МПД обеспечивает вероятность ошибки декодирования порядка 10^{-13} при вероятности ошибки в канале около 0,011.

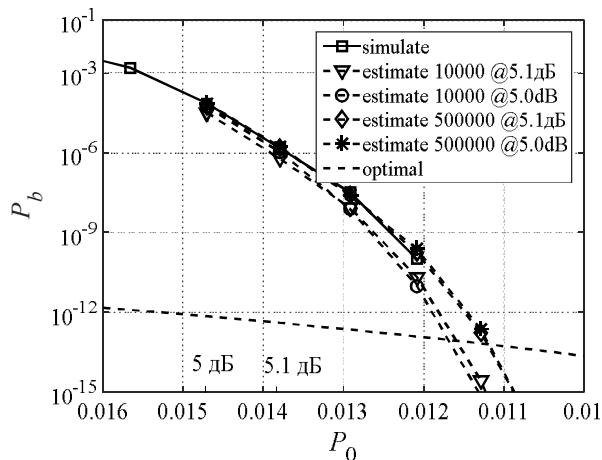


Рисунок 6 – Зависимость вероятности ошибки декодирования и ее оценки от отношения сигнал-шум для кода с $R=3/4$ и $d=17$

Также отметим, что компьютерный эксперимент по получению оценки вероятности ошибки декодирования с помощью моделирования при вероятности ошибки в канале около 0,011 мог занять в районе 100 дней, так как потребовал бы оценки вероятности ошибки декодирования порядка 10^{-12} , что требовало имитацию передачи по каналу хотя бы 10^{13} битов.

Выводы

В статье предложен комбинированный имитационно-аналитический метод оценки вероятности ошибки декодирования с помощью МПД. Представленные результаты экспериментальных исследований показали, что в результате использования данного метода получаются удовлетворительные по точности оценки. При этом время получения оценок для представленных примеров оказывается в сотни раз меньше, чем при использовании обычного компьютерного моделирования. Отметим, что данный метод может быть адаптирован для оценивания эффективности декодеров других блочных кодов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Рязанского государственного радиотехнического университета и Российского фонда фундаментальных исследований.

Библиографический список

1. Зубарев Ю. Б., Овечкин Г. В. Помехоустойчивое кодирование в цифровых системах передачи данных // Электросвязь. М., 2008. № 12. С. 2-11.
2. Золотарёв В. В., Зубарев Ю. Б., Овечкин Г. В. Многопороговые декодеры и оптимизационная теория кодирования. М.: Горячая линия – Телеком, 2012. 239 с.
3. Золотарёв В. В., Овечкин Г. В. Повышение надежности передачи и хранения данных с использованием многопороговых методов декодирования помехоустойчивых кодов // Цифровая обработка сигналов. 2012. № 1. С. 16-21.
4. Гринченко Н. Н., Золотарёв В. В., Овечкин Г. В., Овечкин П. В. Многопороговое декодирование в каналах с многопозиционной модуляцией // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2006. № 19. С. 179-182.
5. Zolotarev V. V., Ovechkin G. V., Shevlyakov D. A. The Performance of Multithreshold Decoder over Fading Channels // Proceeding of 2015-th International Siberian Conference on Control and Communications (SIBCON). Омск, 2015.
6. Као В. Т., Овечкин Г. В. Повышение эффективности многоуровневого многопорогового декодера самоортогональных кодов // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета, 2014. № 49. С. 10-14.
7. Золотарев В. В., Овечкин Г. В., Федиов В. С. Повышение скорости работы недвоичного многопорогового декодера // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2013. № 4-2 (46). С. 22-27.
8. Овечкин Г. В., Овечкин П. В. Использование недвоичного многопорогового декодера в каскадных схемах коррекции ошибок // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2009. № 29. С. 7-12.
9. Демидов Д. С. Разработка программных средств моделирования систем передачи данных с использованием помехоустойчивого кодирования // Известия Тульского государственного университета. 2014. Вып. 9. Ч. 2. С. 28-35.
10. Демидов Д. С., Овечкин Г. В. Моделирование системы передачи данных с многопороговым декодером с использованием OpenCL // Фундаментальные исследования. 2015. № 12-2. С. 243-247. <http://www.fundamental-research.ru/ru/article/view?id=39398>.
11. Золотарев В. В., Овечкин Г. В., Федиов В. С. Повышение достоверности хранения цифровых данных на флеш-памяти // Материалы 6-й Международной научно-технической конференции «Космонавтика. Радиоэлектроника. Геоинформатика». Рязань: Рязанский государственный радиотехнический университет, 2013. С. 201-203.

UDC 621.391:519.72

COMBINED SIMULATION-ANALYTICAL METHOD FOR ESTIMATION OF ERROR PROBABILITY IN THE DIGITAL TRANSMISSION SYSTEM WITH MULTITHRESHOLD DECODER

D. S. Demidov, post-graduate student, RSREU, Ryazan; dmitri-demidiv@yandex.ru

G. V. Ovechkin, PhD (technical sciences), professor, RSREU, Ryazan; g_ovechkin@mail.ru

The aim of this work is the performance of multithreshold decoder (MTD) for self-orthogonal codes estimation for low decoder error probability. The problem is relevant because of large volumes of the experiment and huge time-consuming required for estimation of MTD bit-error rate via computer simulation in case with decoder error probabilities of the order 10^{-12} and lower. This article offers and describes combined imitation-analytical method for estimation of multithreshold decoder bit-error rate. This method provides estimation of bit-error rate for goal signal to noise ratio based on the statistics of bit-error rate in decoded blocks for higher signal to noise ratio. Presented results reveal that such method allows to receive goal results hundred or more times faster than using computer simulation.

Key words: data transmission system, error-correction coding, multithreshold decoder, optimum decoder, self-orthogonal codes, computer simulation, estimation of bit-error rate, additive white gaussian channel.

References

1. Zubarev J. B., Ovechkin G. V. Pomekhoustojchivoe kodirovanie v cifrovyh sistemah peredachi dannyh. *EHlektrorsvyaz'*. Moscow, 2008, no. 12, pp. 2-11 (in Russian).
2. Zolotarev V. V., Zubarev J. B., Ovechkin G. V. *Mnogoporogovye dekodery i optimizacionnaya teoriya kodirovaniya* (Multithreshold decoding and optimizing coding theory). Moscow: Goryachaya liniya – Telekom, 2012, 239 p. (in Russian).
3. Zolotarev V. V., Ovechkin G. V. Povyshenie nadezhnosti peredachi i hraneniya dannyh s ispol'zovaniem mnogoporogovyh metodov dekodirovaniya pomekhoustojchivyh kodov. *Tsifrovaja Obrabotka Signalov*, 2012, no. 1, pp. 16-21 (in Russian).
4. Grinenko N. N., Zolotarev V. V., Ovechkin G. V., Ovechkin P. V. Mnogoporogovoe dekodirovanie v kanalah s mnogopozicionnoj modulyacij. *Vestnik Rjazanskogo gosudarstvennogo radiotekhnicheskogo universiteta*. 2006, no. 19, pp. 179-182 (in Russian).
5. Zolotarev V. V., Ovechkin G. V., Shevlyakov D. A. The Performance of Multithreshold Decoder over Fading Channels. *Proceeding of 2015-th International Siberian Conference on Control and Communications (SIBCON)*, Omsk, 2015.
6. Cao V. T., Ovechkin G. V. Povyshenie effektivnosti mnogourovnevogo mnogo-porogovogo dekodera samoortogonal'nyh kodov. *Vestnik Rjazanskogo gosudarstvennogo radiotekhnicheskogo universiteta*. 2014, no. 49, pp. 10-14 (in Russian).
7. Zolotarev V. V., Ovechkin G. V., Fediov V. S. Povyshenie skorosti raboty nedvoichnogo mnogoporogovogo dekodera. *Vestnik Rjazanskogo gosudarstvennogo radiotekhnicheskogo universiteta*. 2013, no. 4-2 (46), pp. 22-27 (in Russian).
8. Ovechkin G. V., Ovechkin P. V. Ispol'zovanie nedvoichnogo mnogoporogovogo dekodera v kaskadnyh skhemah korrekcii oshibok. *Vestnik Rjazanskogo gosudarstvennogo radiotekhnicheskogo universiteta*. 2009, no. 29, pp. 7-12 (in Russian).
9. Demidov D. S. Razrabotka programmnyh sredstv modelirovaniya sistem peredachi dannyh s ispol'zovaniem pomekhoustojchivogo kodirovaniya. *Izvestija Tul'skogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2014, no. 9-2, pp. 28-35 (in Russian).
10. Demidov D. S., Ovechkin G. V. Modelirovaniye sistemy peredachi dannyh s mnogoporogovym dekoderom s ispol'zovaniem OpenCL. *Fundamental'nye issledovaniya*, 2015, no. 12-2, pp. 243-247. <http://www.fundamental-research.ru/ru/article/view?id=39398>.
11. Zolotarev V. V., Ovechkin G. V., Fediov V. S. Increasing the reliability of the storage of digital data on a flash memory. *Materialy 6-j Mezhdunarodnoj nauchno-tehnicheskoy konferencii «Kosmonavtika. Radioelektronika. Geoinformatika»*, Ryazan, 2013, pp. 201-203 (in Russian).