

# Алгоритмы многопорогового декодирования линейных кодов

**В.В.Золотарёв, ИКИ РАН**  
Москва

Рассмотрены основные принципы метода многопорогового декодирования (МПД) линейных кодов как поиска глобального экстремума функционала от большого числа переменных. Показано, что эффективность МПД близка к результатам, обеспечиваемым оптимальными переборными методами. Даются оценки сложности декодирования по числу операций. Анализируются характеристики недвоичных МПД, которые сравниваются с кодами Рида-Соломона.

## **1. Принцип повторного декодирования.**

За последние десятилетия теория и техника помехоустойчивого кодирования продвинулись далеко вперед. Вместе с тем сложность большинства достаточно эффективных методов помехоустойчивого кодирования всё ещё достаточно велика. Ниже рассмотрены возможности простых итеративных процедур коррекции ошибок, построенных на основе модификации мажоритарных методов.

Предложенные в 70-х годах прошлого века многими авторами методы повторного декодирования принятых сообщений, оказались малоэффективными вследствие сильного группирования ошибок на

выходе декодера. Пример такой схемы с пороговым декодером (ПД) [1] для свёрточного кода приведен на рис.1.

Малая эффективность подобной схемы декодирования была следствием сильного группирования, т.е. размножения ошибок (РО) в пороговом декодере. В самом деле, если при некотором уровне шума в двоичном симметричном канале (ДСК) в какой-то момент ПД принял неправильное решение об очередном информационном символе, то обычно на выходе этого ПД далее появлялся очень плотный пакет ошибок. Например, пусть с выхода первого ПД на рис.1 на вход второго поступила немного улучшенная при первой попытке декодирования последовательность. Тогда если

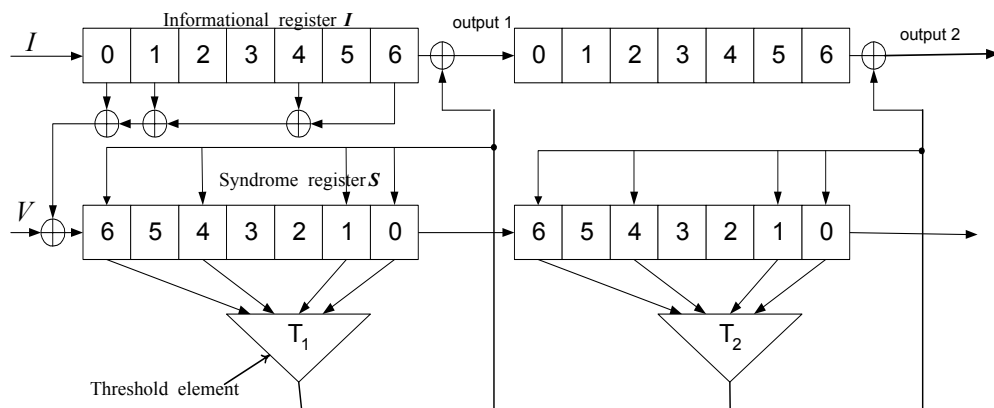


Рис.1.

Пример схемы повторного декодирования на основе порогового декодера свёрточного кода.

ошибок в некоторой части информационной последовательности после первого ПД нет, то второй декодер не нужен. Но при появлении

на выходе первого ПД ошибки, которая обычно является началом типичного пакета ошибок этого ПД, оказывается, что второй декодер, точно повторяющий схему первого и настроенный на исправление случайных ошибок, скорее всего, не исправит этот пакет. Следовательно, он не нужен и в этом случае.

Подчеркнем, что коды с малым уровнем РО в ПД в те годы были совершенно неизвестны. Однако позже эта проблема была полностью решена методами, описанными в [3,7,9]. В связи с этим приобретает важное значение рассмотренный ниже новый подход к реализации простых эффективных процедур исправления ошибок, который развивается с 1972 г. и назван многопороговым декодированием [2].

## **2. Принцип глобальной оптимизации функционала**

Развитие методов декодирования помехоустойчивых кодов в течение длительного времени удивительным образом никак не было связано с методами решения задачи оптимизации функционала от многих дискретных переменных. Тем не менее, декодирование, т.е. поиск единственного кодового слова из экспоненциально большого числа возможных сообщений, совершенно естественно было бы рассматривать именно с таких позиций. Однако большинство разрабатывавшихся ранее алгоритмов декодирования никак не

использовало для поиска наилучших решений декодера хорошо известные разнообразные мощные оптимизационные процедуры, которые вполне можно было бы применить к поиску кодовых слов, находящихся на минимально возможном расстоянии от принятого сообщения. Заметим, что широко применяемый в технике связи алгоритм Витерби (АВ), используемый для декодирования по максимуму правдоподобия коротких свёрточных кодов, также не относится к классу оптимизационных процедур, поскольку он непосредственно ищет оптимальное решение на основе удобного в реализации метода полного перебора.

Вместе с тем некоторые алгоритмы декодирования, в частности, пороговые декодеры (ПД), относящиеся к простейшим методам коррекции ошибок, почти уже обладают именно теми свойствами, которые необходимы для реализации полноценных эффективных и одновременно исключительно простых процедур декодирования, которые действительно были бы методами поиска глобального экстремума функционала от очень большого числа переменных. Для подтверждения этого рассмотрим пример простейшей системы кодирования/порогового декодирования с кодовой скоростью  $R=1/2$  и минимальным кодовым расстоянием  $d=3$ , показанный на рис.2.

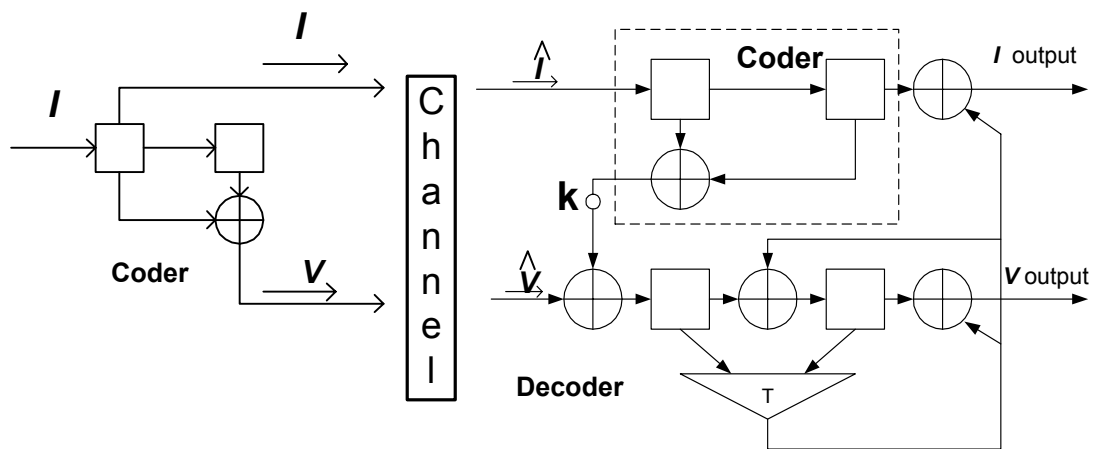


Рис.2.  
Специальный вид системы кодирования,  
поясняющий новую интерпретацию вектора синдрома.

Как следует из вида кодера и простейшего мажоритарного декодера, исправляющего одну ошибку, в состав этого декодера входит точная копия кодера, которая формирует свои оценки проверочных символов кода из принятых из канала (возможно) с ошибками информационных символов кода. Эти символы появляются в точке  $k$  декодера и затем, после сложения на полусумматоре с принятыми из канала проверочными символами  $\hat{V}$  образуют символы вектора синдрома  $S$ , который зависит только от вектора ошибок канала. Эти символы и поступают потом на пороговый элемент декодера из синдромного регистра, как это показано на рисунке.

Уже сам вид ПД на представленной схеме кодирования/декодирования позволяет найти простой способ организации правильной процедуры оптимизации, т. е. поиска наилучшего возможного решения при декодировании. Укажем для этого на факт, который никогда не отмечался ранее: в регистре синдрома декодера находится разность по проверочным символам между принятым с искажениями из канала вектором  $\check{A}$  и таким кодовым словом  $\bar{A}_r$ , информационные символы которого совпадают с принятой из канала информационной частью вектора  $\check{A}$ .

Значит, полная разница между кодовым словом – текущей гипотезой-решением декодера  $\bar{A}_i$  о переданном кодовом слове и принятым зашумленным вектором  $\check{A}$  будет в таком модифицированном декодере мажоритарного типа, где в ПД будет добавлен ещё всего один вектор, который всегда должен соответствовать разности между  $\check{A}$  и  $\bar{A}_i$  - текущей гипотезой декодера по информационным символам. В таком декодере и будет содержаться текущее значение полной разности и, следовательно, полное расстояние между решением декодера и принятым вектором. Это расстояние следует стремиться уменьшить до минимально возможного, что и будет соответствовать решению оптимального декодера (ОД).

### 3. Принципы работы МПД

Именно такой подход к проблеме высокоэффективного декодирования и является основой развиваемых с 1972 года специальных итеративных многопороговых декодеров (МПД) [2,3], почти совпадающих с ПД и таких же простых в реализации, как и их прототип.

Изменения, которые необходимо сделать в обычном ПД, чтобы преобразовать его в МПД, как следует из обсуждения принципа глобальной оптимизации в предыдущем разделе, состоят просто в том, что решения всех пороговых элементов об изменениях декодируемых символов сначала запоминаются в дополнительном разностном регистре  $D$ , первоначально, естественно, нулевым. Эти решения затем используются последующими пороговыми элементами (ПЭ) декодера в качестве дополнительной проверки при дальнейшем уточнении значений декодируемых символов. Такой декодер измеряет полные расстояния между всё более новыми потенциальными решениями и принятым вектором  $\check{A}$ . Это позволяет во многих случаях практически полностью реализовать корректирующие возможности используемых кодов. Примеры конкретных схем МПД приведены в [10].

Декодер после этого достаточно простого усовершенствования приобретает новые чрезвычайно полезные свойства [3,7,9]. Решения МПД при каждом изменении декодируемых им информационных

символов строго приближаются к решению оптимального декодера (ОД), обеспечивая во многих случаях реализацию этого процесса даже после нескольких десятков попыток коррекции кодового блока или потока символов свёрточного кода. Разумеется, для обеспечения высокой эффективности МПД при больших шумах канала необходимо выбирать только специальные коды с малым уровнем РО. Этот важный вопрос рассматривается в следующем разделе.

Рассмотрим далее описанные возможности МПД более формально.

Пусть задан двоичный линейный систематический блочный или свёрточный код со скоростью передачи  $R=k/n$ , где  $k$  – число информационных символов,  $n$  – длина кодовой комбинации.

При передаче по ДСК без памяти оптимальный декодер (ОД), минимизирующий среднюю вероятность ошибки, из множества  $2^k$  равновероятных кодовых слов  $\{\bar{A}\}$  выбирает такой вектор  $\tilde{A}$ , для которого расстояние Хэмминга  $r=|\bar{Q} \oplus \tilde{A}|$ , где  $\bar{Q}$  – принятое сообщение,  $\oplus$  – сложение по mod 2, было бы минимальным по всему множеству  $\{\bar{A}\}$ .

Будем любой двоичный вектор  $\bar{X}$  длины  $n$  представлять парой векторов  $\bar{X}_I$  и  $\bar{X}_V$  длины  $k$  и  $(n-k)$  соответственно, относящихся к информационной и проверочным частям вектора:

$$X = (\bar{X}_I, \bar{X}_V).$$

Тогда в предположении, что проверочная матрица кода представлена в систематическом виде:  $H = (C : I)$ , имеет место

**Лемма.** Для любого кодового вектора  $\bar{A}$  и принятого сообщения  $\bar{Q}$  справедливо соотношение

$$\bar{A} \oplus \bar{Q} = (\bar{D}, H(\bar{Q}_I \oplus \bar{D}, \bar{Q}_V)), \quad (1)$$

где вектор  $\bar{D}$  длины  $k$  определяется соотношением

$$\bar{A}_I = \bar{Q}_I \oplus \bar{D}. \quad (2)$$

**Доказательство.** В силу линейности кода

$\bar{S} = H(\bar{Q}_I \oplus \bar{D}, \bar{Q}_V) = H(\bar{A}_I, \bar{A}_V \oplus \bar{A}_V \oplus \bar{Q}_V) = H \cdot \bar{A} \oplus H(\bar{0}_I, \bar{A}_V \oplus \bar{Q}_V)$ ,  
где  $\bar{0}_I$  – нулевое информационное слово.

Так как  $H\bar{A} = 0$ , поскольку  $\bar{A}$  – кодовое слово, а  $H(\bar{0}_I, \bar{A}_V \oplus \bar{Q}_V) = \bar{A}_V \oplus \bar{Q}_V$ , так как  $(\bar{A}_V \oplus \bar{Q}_V)$  умножается только на единичную подматрицу  $I$  матрицы  $H$ , то получаем, что вектор  $\bar{S}$  равен

$$\bar{S} = \bar{A}_V \oplus \bar{Q}_V. \quad (3)$$

Проводя в правой части (1) замены с учетом (2), находим, что

$$(\bar{D}, \bar{S}) = (\bar{D}, \bar{A}_V \oplus \bar{Q}_V) = (\bar{D} \oplus \bar{Q}_I \oplus \bar{Q}_I, \bar{A}_V \oplus \bar{Q}_V) = \bar{A} \oplus \bar{Q}.$$

Таким образом, вектор синдрома  $\bar{S}$  действительно, как это и было представлено на рис.2, есть разница по проверочным символам между пришедшим из канала частично искажённым сообщением и определённым выше кодовым словом.

**Лемма доказана.**

Ее содержание заключается в том, что разность  $\bar{B} = \bar{Q} \oplus \bar{A}$  для любого принятого вектора  $\bar{Q}$  и кодового слова  $\bar{A}$  определяется парой векторов  $(\bar{D}, \bar{S})$ . Перебором всех векторов  $\bar{A}$  можно найти вектор  $\hat{A}$ , минимизирующий  $|\bar{B}|$  и являющийся решением оптимального декодера (ОД). В силу определения при  $\bar{D} = 0$  вектор  $\bar{S}$  является обычным синдромом принятого сообщения  $\bar{Q} : \bar{S} = H\bar{Q}$ . Для простоты изложения будем в дальнейшем и при  $\bar{D} \neq 0$  называть  $\bar{S}$  синдромом, поскольку это обобщение естественно и не приводит в дальнейшем к каким-либо противоречиям. Отметим также, что при каждом изменении  $\bar{A}$  нет необходимости заново вычислять все компоненты синдрома. Достаточно на каждом шаге изменения инвертировать только те компоненты  $\bar{S}$ , которые содержат нечетное число ошибок в изменяемых информационных символах. Однако переборные алгоритмы слишком сложны.

Поэтому рассмотрим алгоритм декодирования, который очень близок к пороговому и в связи с этим весьма просто реализуем. Пусть на первом подготовительном этапе декодер выполняет вычисление и запоминание вектора  $\bar{S}$ . Затем начинается выполнение собственно процедуры декодирования. На каждом шаге декодер вычисляет обычную сумму компонент синдрома  $s_{jk}$ , содержащих в качестве слагаемых ошибку  $e_j$ , в декодируемом символе  $i_j$  (т. е. сумму

проверок  $s_{jk} \in \{S_j\}$ , где  $\{S_j\}$  – множество проверок относительно компоненты  $e_j$ , соответствующей символу  $i_j$ ) и символа  $d_j$ , компоненты вектора  $\bar{D}$ , также относящегося к декодируемому символу  $i_j$ :

$$L_j = \sum_{s_{jk} \in \{S_j\}} s_{jk} + d_j. \quad (4)$$

Будем при этом полагать, что первоначально  $\bar{D} = 0$ , потому что перед началом операций декодирования в памяти декодера есть только принятый вектор  $\bar{Q}$  и декодер не имеет никаких других более предпочтительных гипотез о переданном сообщении.

Выберем порог  $T$  равным половине всех слагаемых в (4). Для СОК это число равно  $T=d/2=(J+1)/2$ . Пусть, наконец, все  $J=d-1$  проверок,  $i_j$  и  $d_j$  инвертируются при  $L_j > T$  и остаются неизменными при  $L_j \leq T$ .

Предлагаемая процедура при первой попытке декодирования, пока все  $d_j = 0$ , совпадает с обычным алгоритмом для ПД. Будем в дальнейшем называть декодер, реализующий предлагаемый алгоритм, многопороговым декодером (МПД).

При этом справедлива

**Основная теорема многопорогового декодирования (МПД).**

Если на произвольном  $j$ -м шаге МПД изменяет декодируемый информационный символ  $i_j$ , то:

а) при этом МПД находит новое кодовое слово  $\bar{A}_2$ , более близкое к принятому сообщению  $\bar{Q}$ , чем то кодовое слово  $\bar{A}_1$ , которому соответствовало значение  $i_j$  перед  $j$ -м шагом декодирования

$$|\bar{B}_1| = |\bar{A}_1 \oplus \bar{Q}| > |\bar{A}_2 \oplus \bar{Q}| = |\bar{B}_2|;$$

б) после окончания  $j$ -го шага возможно декодирование любого очередного символа  $i_k, k \neq j$ , так что при его изменении будет осуществлено дальнейшее приближение к принятому сообщению.

**Доказательство.** Перед началом декодирования символа  $i_j$  согласно Лемме справедливо

$$(\bar{D}_1, \bar{S}_1) = (\bar{A}_{1I} \oplus \bar{Q}_1, H(\bar{Q}_I \oplus \bar{D}_1, \bar{Q}_V)) = \bar{A}_1 \oplus \bar{Q},$$

где

$$\bar{A}_1 = (\bar{A}_{1I}, \bar{A}_{1V}), \bar{A}_{1I} = \bar{Q}_I \oplus \bar{D}_1.$$

Вес вектора  $\bar{B}_1$  перед этим шагом, равный  $|\bar{B}_1| = |\bar{D}_1| + |\bar{S}_1|$ , можно представить в виде обычной суммы весов  $W_1 = L_{1j} + X$ , где  $L_{1j}$  определено выражением (4) и равно сумме проверок и

символа  $d_j$ , на пороговом элементе;  $X$  – вес остальных компонент  $\bar{S}_1$ , и  $\bar{D}_1$ , не входящих в  $L_{1j}$ .

Рассмотрим кодовый вектор  $\bar{A}_2$ , отличающийся от  $\bar{A}_1$  только в одном информационный символе  $i_j$ , и соответствующую ему разность  $\bar{B}_2 = \bar{A}_2 \oplus \bar{Q}$ . Поскольку  $\bar{B}_1$  и  $\bar{B}_2$  отличаются между собой только в тех компонентах, которые поступают на пороговый элемент, то  $|\bar{B}_2| = L_{2j} + X$ , где  $L_{1j} + L_{2j} = J + 1$ , потому что в силу линейности кода каждая проверка и символ  $d_j$ , точно в одном из двух векторов  $\bar{B}_i$ , равны 1.

Так как МПД изменяет  $i_j$ , если  $L_{1j} > T$ , то для этого необходимо, чтобы было  $L_2 < L_1$  и, следовательно,  $|\bar{B}_1| > |\bar{B}_2|$ , чем доказан пункт а) теоремы.

Далее, очевидно, если символ  $i_j$  не изменялся, то можно декодировать любой другой символ  $i_k, k \neq j$ , поскольку при этом сохраняются условия леммы. В случае же изменения  $i_j$  в соответствии с правилами работы МПД после декодирования  $i_j$  имеют место равенства  $\bar{A}_{2l} = \bar{Q}_l \oplus \bar{D}_2$  и  $\bar{S}_2 = H(\bar{Q}_l \oplus \bar{D}_2, \bar{Q}_v)$ , где  $\bar{D}_2$  отличается от  $\bar{D}_1$  в символе  $d_j$ , поскольку при изменении (согласно исходному алгоритму ПД - через обратную связь (ОС) с порогового элемента)

проверок, относящихся к  $i_j$ , инвертируются именно те компоненты  $\bar{S}_1$ , в которых  $\bar{S}_2$  отличается от  $\bar{S}_1$ . Отсюда получаем, что после изменения  $i_j$  для определенных выше векторов  $\bar{D}_2$ ,  $\bar{A}_2$  и  $\bar{S}_2$  имеет место равенство

$$(\bar{D}_2, \bar{S}_2) = (\bar{A}_2 \oplus \bar{Q}),$$

аналогичное тому, которое имело место перед изменением  $i_j$ . Тем самым при последующих шагах декодирования и изменениях символов  $i_k, k \neq j$ , также будет осуществляться дальнейшее приближение к принятому из канала сообщению  $\bar{Q}$ .

#### **Основная теорема МПД доказана.**

Мы показали, что МПД при каждом изменении декодируемых символов приближается к вектору  $\bar{Q}$ , отыскивая тем самым все более близкие к оптимальному решению, более правдоподобные вектора  $\bar{A}_i$ . МПД просматривает и сравнивает не экспоненциально большое количество кодовых слов, а только пары, отличающиеся между собой лишь в одном информационном символе, причем, одно из сравниваемых слов находится в декодере. В случае, если второе кодовое слово окажется ближе к вектору  $\bar{Q}$ , чем то, которое находится в МПД, декодер переходит к нему и дальнейшие сравнения производятся уже с новым промежуточным вектором  $\bar{A}_i$ . Ясно, что

в принципе можно проводить достаточно большое число попыток декодирования и приближения к решению ОД – вектору  $\tilde{A}$ . Принципиально важно, что при этом сложность МПД остаётся такой же, как и у обычного ПД - линейной.

Допустим далее, что МПД достиг решения ОД, т.е. в информационном регистре МПД находятся символы вектора  $\tilde{A}$ . Тогда справедливо

**Следствие.** МПД не изменит решения ОД.

**Доказательство.** Если бы МПД изменил на некотором шаге хотя бы один информационный символ в векторе  $\tilde{A}$ , то это означало бы, что нашелся другой кодовый вектор  $\tilde{A}^*$ , который ближе к  $\bar{Q}$ , чем  $\tilde{A}$ , что невозможно, потому что, по определению, ближайшим к  $\bar{Q}$  словом является вектор  $\tilde{A}$ .

**Следствие доказано.**

Таким образом показана устойчивость решения МПД относительно оптимального решения: достигнув его, МПД останется в нём. Это очень важно, поскольку алгоритм предполагает возможность многократного изменения декодируемых символов.

Можно также заметить, что при доказательстве основной теоремы МПД единственность декодируемого символа  $i_j$  не использовалась сколько-нибудь существенным образом. Отсюда

следует, что данная процедура декодирования может применяться и к любой группе информационных символов.

Для применения алгоритма МПД при декодировании в гауссовском канале с квантованием принимаемого двоичного потока на  $M$  уровней,  $M > 2$ , удобно сначала переписать функцию правдоподобия  $L_j$  в виде

$$L'_j = \sum_{s_{jk} \in \{S_j\}} w_{jk} * (2 * s_{jk} - 1) + w_{dj} * (2 * d_j - 1) \quad (5)$$

Для обычного ДСК это выражение с весами проверок  $w_{jk}$ , равными 1, очевидно эквивалентно (4). При переходе к гауссовскому каналу, т. е. в случае  $M$ ,  $M > 2$ , уровней квантования сигнала весовые коэффициенты при вычислении  $L'_j$  могут выбираться как небольшие вещественные или целые числа. Тогда декодируемые символы в МПД для гауссовского канала следует изменять при  $L'_j > 0$ . При этом, если  $M \gg 1$ , то, как известно, корректирующие возможности используемых кодов и хороших алгоритмов их декодирования, в том числе МПД, обычно улучшаются примерно на 2 дБ по уровню отношения сигнал/шум на входе декодера.

#### **4. Размножение ошибок декодирования в мажоритарных декодерах.**

Из доказанных выше результатов следует, что увеличение числа попыток исправления ранее декодированных символов с помощью МПД может быть действительно полезным, поскольку при каждом изменении информационных битов кода происходит переход к более правдоподобным решениям. Однако из этого не следует, что МПД обязательно достигнет оптимального решения. Для многих кодов существует весьма большое число таких сочетаний ошибок канала, что они исправляются при оптимальном декодировании, но не исправляются с помощью МПД. В значительной мере это связано с тем, что пороговые декодеры действительно в довольно большой степени подвержены влиянию эффекта размножения ошибок. Второй и другие последовательно соединенные улучшенные ПД, из которых состоят, например, свёрточные МПД, обычно вынуждены работать в основном с потоками пакетов ошибок от предыдущих итераций декодирования декодеров.

Ниже представлен метод оценки размножения ошибок (РО) для самоортогональных кодов (СОК) [12], состоящий в том, что с помощью многомерных производящих функций вероятности (ПФВ) вычисляются оценки вероятности появления одиночных ошибок и пакетов на выходе ПД. Этот метод помогает как при отборе кодов, в

наименьшей степени подверженных влиянию РО, так и при выборе оптимальных весов и порогов в МПД, обеспечивающих наименьшие значения вероятности его ошибок декодирования.

Пусть в двоичном симметричном канале (ДСК) задана вероятность ошибки  $p_0$ .

Выберем в некотором СОК первый информационный символ  $i_0$  и другой произвольный информационный символ  $i_m, m > 0$ . Для каждого из них можно перечислить те компоненты синдрома  $\bar{S}$ , которые образуют множество ортогональных проверок и подаются при их декодировании на ПЭ. Пронумеруем эти проверки от 1 до  $J = d - 1$ . Если при этом какой-то символ  $s_n \in \bar{S}$  будет поступать на ПЭ в обоих случаях, то он будет иметь два различных номера, соответствующих символам  $i_0$  и  $i_m$ .

Рассмотрим теперь все информационные и проверочные символы, входящие в проверки хотя бы относительно одного из  $i_0$  или  $i_m$ . Пусть необходимо построить верхнюю оценку совместной вероятности ошибки в двух символах  $i_0$  и  $i_m$ :  $P(\xi_0 = 1, \xi_m = 1)$ .

Тогда, аналогично одномерному случаю вычисления вероятности ошибки в первом символе  $P_1(e)$  в обычном ПД, получаем, что для любого  $i_k, k \geq m$ , ошибка в котором входит в качестве слагаемого в  $n$ -ю проверку относительно  $i_m$  и в  $l$ -ю проверку

относительно  $i_m$ , ПФВ принимает вид  $A_{nl}(x, y) = p_0 x_n y_l + q_0$ . Если ошибка в некотором  $i_k$  входит в проверки только относительно  $i_0$  или  $i_m$ , то ПФВ приобретает одномерный вид:  $A_n(x) = p_0 x_n + q_0$  или  $A_l(y) = p_0 y_l + q_0$  соответственно. Для проверочных символов, которые входят в качестве слагаемых только в проверки относительно одного из  $i_0$  или  $i_m$ , одномерные ПФВ имеют такой же вид. Так как мы рассматриваем случай ошибок в ПД в  $i_0$  и  $i_m$ , то в том (единственном, потому что код – самоортогональный!) проверочном символе (если он есть), который соответствует проверке, участвующей в решении ПД относительно  $i_0$  и  $i_m$ , следует учесть, что через обратную связь (ОС) на синдромный регистр  $S$  в эту проверку поступает ошибка ПД. ПФВ для этого символа имеет вид  $A_{nl}(x, y) = p_0 x_n + q_0 y_l$ .

Наконец, последнее правило, которое необходимо выполнить при выводе оценки появления двух ошибок ПД, состоит в том, что относительно всех информационных символов  $i_k, 0 < k < m$ , предполагается, что при их декодировании через ОС на регистр  $S$  поступает истинное значение ошибки в  $i_k$ . Поэтому ошибки в этих символах при декодировании  $i_m$  отсутствуют. Такой гипотетический ПД называется декодером с «джином». В данном случае описание поведения ПД через свойства такого особого декодера позволит проще получить необходимые оценки для обычного ПД. Разумеется, если

$m=1$ , то никаких дополнительных предположений о кодировании с "джином" не требуется.

Введем теперь правило перемножения многомерных ПФВ. Оно состоит в том, что показатели степени при  $x_n$  и  $y_l$  с одинаковыми индексами складываются по mod 2. Таким образом, все показатели степени при  $x_n$  и  $y_l$  имеют только значения 0 или 1. Это связано с тем, что значения проверок могут быть только 0 или 1, а ошибки, относящиеся к одинаковым проверкам, имеют одинаковые индексы и сумма по mod 2 четного числа ошибок равна 0.

В результате перемножения всех ПФВ получаем сумму

$$A_{0m}(x, y) = \sum_{a_{n_1 n_2 \dots n_d, k_1 \dots k_d}} x^{n_1 + n_2 + \dots + n_d} y^{k_1 + \dots + k_d} \quad \text{из} \quad 2^{2d} \quad \text{слагаемых.}$$

Коэффициенты  $a_{\dots}$  с  $2d$  индексами, где  $n_i$  и  $k_i$  равны 0 или 1, являются вероятностями значений проверок, определяемых этими индексами. Например, при  $d = 5$  коэффициент  $a_{01000,10000}$  равен вероятности того, первая проверка относительно  $i$  равна 1, а остальные равны 0. Здесь и далее будем считать, что первый индекс относится к значению декодируемого символа. Так, например, во второй группе индексов их значения указывают на то, что  $a$  равно совместной вероятности описанной комбинации проверок для символа  $i_0$  и ошибке канала  $l_m = 1$  в  $i_m$  при правильных проверках относительно  $i_m$ . После получения рассмотренных коэффициентов в

результате суммирования тех из них, для которых в каждой группе индексов сумма единиц больше  $T$ , получаем оценку  $P(\xi_0 = 1, \xi_m = 1)$  для ПД с «джином», поскольку сумма коэффициентов  $a \dots$  равна вероятности всех возможных сочетаний ошибок в символах  $i_0, i_m$  и проверок, приводящих к ошибкам декодирования.

Например, для свёрточного СОК с  $R=1/2$ , порождающим полиномом в виде степеней при ненулевых элементах  $G=(0,1,4,6)$  и кодовым расстоянием  $d=5$  результирующая ПФВ для  $i_0$  и  $i_1$  имеет вид

$$A_{01}(x,y) = (p_0x_0 + q_0)(p_0x_1 + q_0)(p_0x_2 + q_0y_1)(p_0x_2y_0 + q_0)(p_0x_3y_4 + q_0) \times \\ \times (p_0x_3y_3 + q_0)(p_0x_3 + q_0)(p_0x_4y_2 + q_0)(p_0x_4y_3 + q_0)(p_0x_4y_4 + q_0) \times \\ \times (p_0x_4 + q_0)(p_0y_2 + q_0)(p_0y_3 + q_0)(p_0y_4 + q_0)(p_0y_4 + q_0) \quad (6)$$

Здесь мы также полагаем, что для ошибок в  $i_0$  и  $i_1$  выбраны нулевые индексы, а нумерация проверок от 1 до 4 выполнена в проверочной матрице  $H$  этого кода сверху вниз.

После суммирования коэффициентов согласно указанным выше критериям выбора коэффициентов разложения  $a \dots$ , можно получить, что при  $p_0 \ll 1$   $P(\xi_0 = 1, \xi_1 = 1) \approx 26p_0^3$ , а  $P(\xi_0 = 1, \xi_i = 1) \approx 8p_0^3$ , если  $2 \leq i \leq 4$ . При  $i > 4$  эти вероятности уже имеют порядок  $p_0^4$ , и поэтому при не очень высоких уровнях шума их вклад в РО невелик. Тогда верхняя оценка вероятности появления пакета ошибок в ПД веса 2 и более  $P(\xi_0 = 1, 1)$  равна для  $p_0 \ll 1$

$$P(\xi_0 = 1,1) = \sum_{i=1}^4 P(\xi_0 = 1, \xi_i = 1) = 50p_0^3. \quad (7)$$

Так как можно проверить, что вероятность ошибки в первом символе рассматриваемого кода  $P_1(e) = 85p_0^3$ , то нижняя оценка вероятности одиночной ошибки в первом символе может быть представлена в виде

$$P_H(\xi_0 = 1,0) = P_1(e) - P(\xi_0 = 1,1) = 35p_0^3 \quad (8)$$

Поскольку вероятность  $P(\xi_0 = 1, \xi_1 = 1)$  выше была вычислена точно, то вероятность появления одиночной ошибки оценивается сверху при малом шуме как  $P_B(\xi_0 = 1,0) = P_1(e) - P(\xi_0 = 1, \xi_1 = 1) = 59p_0^3$ . Следовательно, вероятность появления одиночной ошибки ПД с «джином» лежит в диапазоне  $(35 \div 59)p_0^3$ .

Теперь заметим, что в тех случаях, когда ПД с «джином» не ошибается ни в одном символе  $i_k, 0 < k < k = n_A R$ , в пределах длины кодового ограничения ПД также не совершает ни одной ошибки, так как решения «джина» совпадают с решением ПЭ. Но именно для таких последовательностей ошибок канала получена оценка (8). Значит, она справедлива и для обычного ПД.

Возможность оценивать вероятности появления двух ошибок в пределах длины кодового ограничения позволяет обобщить этот метод на пакеты ошибок декодирования любого веса. Для обеспечения высо-

кой эффективности МПД достаточно рассматривать пакеты веса не более 3. При этом приходится проводить вычисления в пространстве параметров размерности  $2^{3d}$ . Но при анализе кодов с  $d \sim 7$  и более эта задача слишком сложна для вычислений.

Однако при дальнейших исследованиях были найдены методы значительного упрощения оценок вероятностей появления пакетов, которые затем позволили сформулировать комплекс критериев, по которым необходимо строить коды с очень малыми вероятностями появления пакетов ошибок при мажоритарном декодировании. Соответствующие алгоритмы построения таких кодов длины  $n$  требуют выполнения порядка  $n^4$  операций, что позволяет искать эффективные коды до длин порядка 500'000 битов. Недавно он был ещё немного улучшен.

При декодировании вблизи пропускной способности канала необходимо применение только очень длинных кодов. Поэтому разработка конструктивных методов построения кодов требуемого качества полностью решила проблему выбора кодов для высокоэффективных декодеров класса МПД.

### **5. Характеристики декодирования**

На [рис.3](#) показаны возможности различных алгоритмов декодирования как функции отношения битовой энергии передачи к спектральной плотности мощности шума канала  $a = E_b/N_0$  для  $R \sim 1/2$ .

Вертикальная линия  $C_2$  соответствует пропускной способности канала  $C=1/2$  в гауссовом канале при  $a=0,2$  дБ. Графики ВАК показывают эффективность алгоритма Витерби (АВ) для длин кода  $K=7, 11, 15$  и  $20$ . Кривая Т1 соответствует лучшему турбо коду длины  $n=130000$  [11], а энергетика стандартной каскадной схемы для АВ с кодом Рида-Соломона даётся графиком VA-RS.

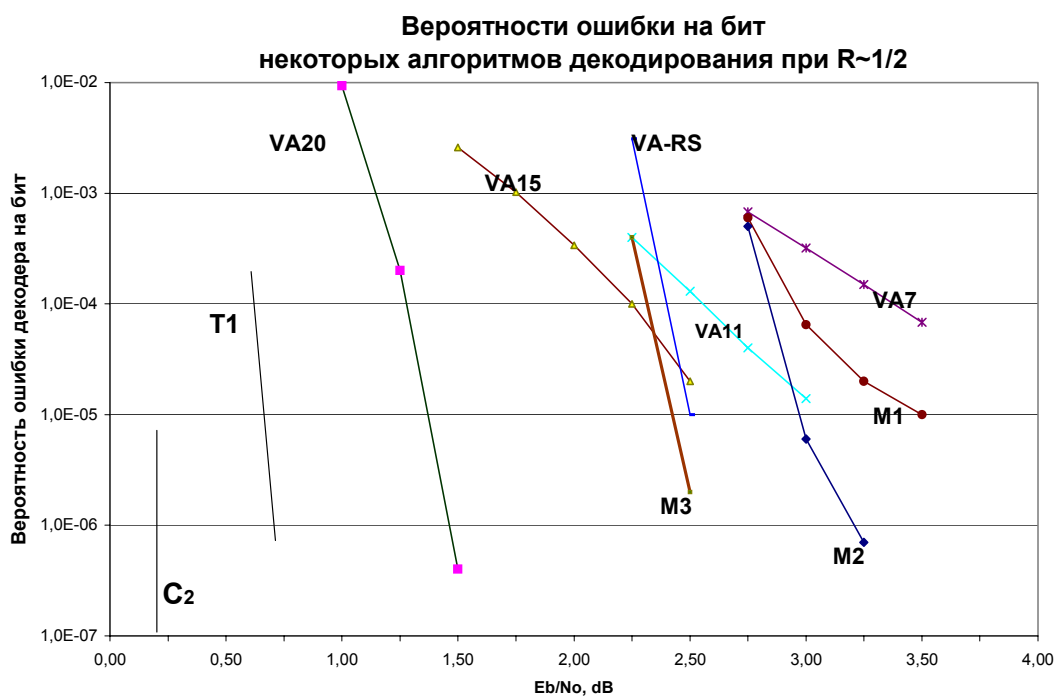


Рис.3.

Далее представлены возможности некаскадных МПД для свёрточных кодов. Кривая М1 приведена для очень простого свёрточного МПД с  $d_m=9$ ,  $I=12$  итерациями и задержкой  $L=4800$  битов.

Для  $a > 3$  дБ решения МПД для этого кода совпадают с ОД (с полным перебором!).

Кривая М2 соответствует возможностям МПД с  $L=10000$ ,  $d=11$  и  $I=9$ . Полезно отметить, что он намного более эффективен, чем АВ с  $K=11$ , который в настоящее время пока что трудно создать для высокоскоростных каналов. Этот МПД реализован аппаратно на информационной скорости более 80 Мбит/с.

Наконец, кривая М3 показывает возможности МПД для кода с  $d_m=13$ , при задержке  $L < 99800$  и  $I < 35$ . Очень существенно, что этот последний пример МПД эффективнее сложной каскадной схемы стандартного АВ с РС. Представляется очевидным, что среди некаскадных схем декодирования характеристики МПД далеко опережают другие алгоритмы коррекции ошибок.

Использование МПД в каскадных кодовых конструкциях позволяет ещё более улучшить возможности этого метода. Некоторые примеры каскадных схем с использованием МПД приведены в [4-8,10].

## **6. Сложность реализации алгоритма МПД.**

Главным достоинством МПД является крайне малая сложность декодирования, состоящая, как и в случае обычного ПД, в суммировании на каждой итерации взвешенных проверок, сравнении

их суммы с порогом и изменении декодируемого символа и всех проверок, если этот порог превышен. Число итераций декодирования  $I$  в этом случае обычно не более 50, а общая сложность декодирования с помощью МПД, очевидно, оценивается для  $d < 25$  как  $N_1 \sim (d+2) * (I+4)$ . Но объём повторяющихся вычислений сумм на пороге можно значительно снизить, поскольку символы на каждом из пороговых элементов изменяются в процессе декодирования весьма редко. Если при тех же условиях на  $I$  и  $d$  возможно ухудшение характеристик МПД всего на 0,1 дБ по энергетике, что обычно вполне допустимо, то объём вычислений в МПД ещё более уменьшается:

$$N_2 \sim c_1 * d + c_2 * I, \quad (9)$$

где константы  $c_1$  и  $c_2$  - небольшие целые числа.

Из полученной оценки непосредственно следует, что формально определяемая сложность как число операций у МПД почти на 2 порядка (до ста раз!) меньше, чем у турбо подобных кодов с сопоставимой энергетической эффективностью. Это же подтвердило компьютерное моделирование [13]. Отметим, что при таких оценках особенная сложность части операций, выполняемых при декодировании турбо кодов, не учитывается.

**МПД алгоритмы легко допускают полное распараллеливание. Поэтому при аппаратной реализации их быстродействие превышает в**

десятки раз скорость продвижения данных по сдвиговым регистрам аппаратуры кодирования. Эти регистры являются самыми быстродействующими элементами схемотехники и составляют почти весь объём аппаратуры МПД. Поэтому можно считать, что МПД - наиболее быстрые декодеры, к производительности которых другие алгоритмы не смогут даже приблизиться как при программной, так и при аппаратной реализации.

При правильном проектировании МПД функция суммирования проверок легко может быть реализована аппаратно таким образом, что она будет полностью эквивалентна простому одноклапному сумматору. В этом случае оказывается, что преимущество МПД по скорости обработки относительно других методов может достигь 3-х десятичных порядков.

Подчеркнём, что существенная разница в эффективности МПД и других методов определяется тем, что этот метод при линейной от длины кода сложности декодирования обеспечивает при правильном проектировании декодера практически оптимальное декодирование длинных кодов при достаточно высоком уровне шума канала.

## **9. Обобщение алгоритма МПД на недвоичные коды.**

Рассмотрим обобщение многопорогового декодирования (МПД) на недвоичные симметричные каналы [14,15]. Ценность этого

метода заключается в том, что мажоритарные алгоритмы имеют всего лишь линейный рост сложности (числа операций декодирования) от длины кода  $n$ . Поскольку обычно оптимальные методы характеризуются экспоненциально растущей с длиной кода сложностью, применение недвоичных МПД, обозначаемых далее как QМПД, представляется особенно желательным.

Ещё более существенно, что в случае больших значений основания кода  $q$ ,  $q > 10$ , вообще невозможно создать эффективные истинно оптимальные декодеры (ОД), в том числе и алгоритм Витерби, поскольку при этом их сложность в большинстве случаев будет иметь вид  $q^k$ , где  $k$  - длина кодирующего регистра. Это и определяет важность применения QМПД, поскольку возможности декодеров для кодов Рида-Соломона (РС) очень ограничены, а их сложность реализации неоправданно велика.

Пусть задан  $q$ -ичный,  $q > 2$ , симметричный канал с вероятностью ошибки  $p_0 > 0$ , такой, что при передаче любой исходный символ кода переходит в один из оставшихся  $q-1$  символов случайно, независимо и равновероятно. По аналогии с двоичным симметричным каналом без памяти (ДСК) назовём этот канал также  $q$ -ичным симметричным каналом (QСК). Для этого канала оптимальным решением при передаче любого символа будет такое, возможно, единственное кодовое слово из  $q^{nR}$  возможных,

которое отличается от принятого сообщения в минимальном числе символов кода. (Здесь предполагалось, что  $n$  - длина кода выраженная числом символов кода,  $R$  - кодовая скорость,  $R < 1$ .)

Рассмотрим линейный недвоичный код, проверочная матрица которого имеет такой же вид, как и в двоичном случае, т. е. состоит только из нулей и единиц. Пусть эта матрица соответствует самоортогональному систематическому блоковому или свёрточному коду. В этом случае слова минимального веса  $d$ , где  $d$  - минимальное расстояние кода, имеют единственный ненулевой символ  $i_k$ , со значением  $q$ ,  $q > 0$ , в его информационной части. Поскольку проверочные (а значит, и порождающие) матрицы кода содержат только нули и единицы, то операции кодера и декодера по формированию проверочных символов кода и вычислению синдрома  $S$  принятого сообщения являются только сложениями. Таким образом, для кодирования и декодирования не требуется наличие недвоичного поля, а достаточно создать только некоторый вариант группы по сложению. Это дополнительно и очень существенно упрощает все процедуры кодирования и реализации последующего декодирования.

Пусть декодер типа QМПД устроен так, что после вычисления обычным образом вектора синдрома  $S$  принятого сообщения процедура декодирования состоит просто в том, что для очередного

контролируемого пороговым (недвоичным!) элементом информационного символа кода  $i_k$  происходит подсчёт числа и определение значений двух относящихся к нему и наиболее часто встречающихся проверок кода, например,  $q_1$  и  $q_2$ , причём  $q_1$  встречается  $m_1$  раз,  $q_2$  -  $m_2$  раз,  $m_1 > m_2$ , а остальные значения проверок для декодируемого символа  $i_k$  встречаются также не более  $m_2$  раз. Тогда QМПД при каждом изменении символа  $i_k$  будет переходить ко всё более правдоподобным решениям [14,15]. Если окажется, что два наиболее часто встречающихся значения проверок таковы, что  $m_1 = m_2$ , то символ  $i_k$  не изменяется и делается попытка декодирования любого другого информационного символа кода.

Наиболее существенным обстоятельством, значительно повышающим корректирующие возможности описанного недвоичного МПД, является возможность принимать безошибочные решения при больших значениях  $q$  всего при 2-х правильных проверках относительно  $i_k$  из  $d$  возможных. Это обычно происходит в том случае, когда все неправильные проверки  $s_i$  относительно декодируемого символа  $i_k$  имеют различные значения  $s_i$ ,  $q_i > s_i > 0$ .

Рассмотрим вычисление нижней оценки вероятности оптимального декодирования для кода, задаваемого описанным выше способом. Во всех этих случаях это будет выявление наиболее часто встречающихся условий того, что вектор ошибки будет иметь

расстояние Хемминга до ближайшего кодового слова меньше, чем его собственный вес. В силу линейности кода этого достаточно для вынесения неправильного решения даже оптимальным переборным алгоритмом. Рассматривая вектор ошибки с такими свойствами, будем учитывать, что нужно анализировать только те символы этого вектора, которые соответствуют позициям проверок относительно очередного декодируемого символа  $i_k$ . Выпишем вероятности таких наиболее частых событий, которые приводят к ошибкам оптимального декодера (ОД).

К искомым векторам ошибки относятся такие, что [14,15]:

- все проверочные символы и декодируемый символ  $i_0$  ошибочны:

$$P_1(e) = p_0^{J+1}, \quad (10)$$

где  $d=J+1$ ,  $d$  - минимальное кодовое расстояние самоортогонального кода;

- все проверочные символы ошибочны, но два из них одинаковы, а  $i_0$  принят верно:

$$P_2(e) = (1-p_0)J(J-1)p_0^J \prod_{i=1}^{J-2} (1-i/(q-1)) / (q-1)/2; \quad (11)$$

- есть один правильно принятый проверочный символ, а остальные ошибочны, как и  $i_0$ :

$$P_3(e) = J(1-p_0)p_0^J; \quad (12)$$

- есть один правильно принятый проверочный символ, а также  $i_0$ , но из всех остальных неправильно принятых символов есть 3 одинаковых значения ошибок:

$$P_4 = (1-p_0)^2 p_0^{J-1} \prod_{i=1}^{J-4} (1-i/(q-1)) J! / (6(J-4)!(q-1)^2); \quad (13)$$

- есть 2 правильных проверочных символа, а все остальные, включая  $i_0$ , неправильны, причем есть 2 ошибочно принятых проверочных символа с одинаковыми значениями:

$$P_5 = (1-p_0)^2 p_0^{J-1} J! \prod_{i=1}^{J-4} (1-i/(q-1)) / (4(J-4)!(q-1)); \quad (14)$$

- есть 3 правильных проверочных символа, а все остальные, включая  $i_0$ , неправильны, причем есть 3 ошибочно принятых проверочных символа с одинаковыми значениями:

$$P_6 = p_0^{J-2} (1-p_0)^3 J! \prod_{i=1}^{J-6} (1-i/(q-1)) / (36(J-6)!(q-1)^2). \quad (15)$$

Заметим, что если кодовое расстояние  $d < 7$ , то уже последний случай рассматривать не следует, так как он предполагает наличие  $J=6$  проверок в коде, тогда как для самоортогональных кодов  $d=J+1$ . Таким образом, нижняя оценка вероятности ошибки оптимального декодирования определяется суммой найденных выше вероятностей  $P_1 \div P_6$ .

Более полное перечисление событий, приводящих к ошибкам недвоичного ОД, и оценки их вероятностей, а также вероятностей

ошибки в первом символе недвоичного ПД приведены в [14,15].  
Простая схема QМПД дана в [10].

Перечисленных событий вполне достаточно, чтобы для большинства реальных условий применения кодов получать удовлетворительные по точности вероятностные оценки потенциальной помехоустойчивости кода. А поскольку QМПД на каждом шаге стремится к решению ОД, то можно ожидать, что при некотором достаточно высоком уровне шума он в большинстве случаев достигнет искомого оптимального решения.

Во многих системах особенно удобно работать с данными, имеющими байтовую структуру. Отметим, что кроме кодов Рида-Соломона (РС) в настоящее время вообще нет других сколько-нибудь эффективных методов декодирования недвоичных символьных данных. Сравним вероятностные характеристики кодов РС с возможностями QМПД. Будем считать, что выбран код РС длины 255 (символ - 8 бит). Подчеркнём, что для QМПД никаких ограничений по длине кода вообще нет, поскольку он выполняет только операции сложения по mod 256 и сравнения.

Очевидно, что недвоичный пороговый элемент, рассмотренный выше при описании операций в QМПД, - простейшее устройство или подпрограмма с числом операций  $N$  сложения и сравнения небольших целых чисел  $N \sim 20 \div 50$  для всех тех небольших

значений минимального кодового расстояния  $d$ ,  $d < 15$ , которое следует применять в таком декодере.

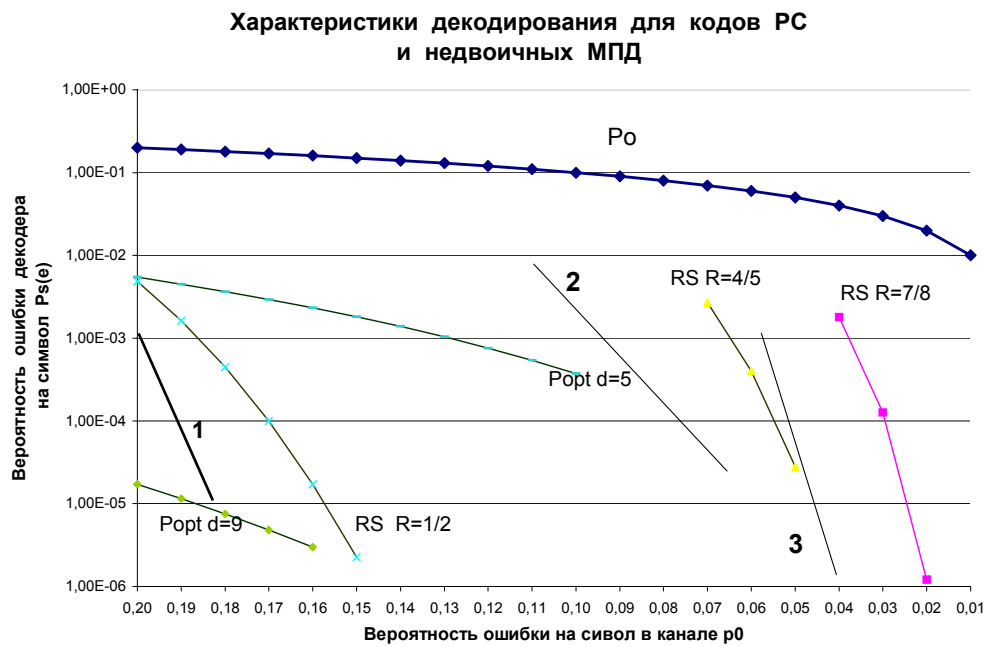


Рис.4.

На рис.4 представлены характеристики декодеров для кодов РС длины  $n=255$  (обозначены: RS) и МПД в QСК. По горизонтальной оси отложены вероятности ошибки  $p_0$  в указанном канале, а по оси ординат - средние вероятности ошибки на символ в результате декодирования.

Для достижения решения, совпадающего с оптимальным или близкого к решению ОД, МПД для  $q=256$  необходимо  $5 \div 20$

итераций (повторных попыток) декодирования принятого сообщения. Это полностью соответствует методу МПД для двоичных кодов [3-7].

Как следует из вида графиков зависимостей средней вероятности ошибки декодирования на символ  $P_s(e)$  от вероятности  $p_0$  канала QСК на входе декодеров для кодовых скоростей  $R=1/2$ ,  $R=4/5$  и  $R=7/8$ , простейший по своему устройству QМПД представлен графиками 1, 2 и 3 соответственно для указанных выше кодовых скоростей и обеспечивает гораздо более высокие характеристики, чем декодеры для кода РС, благодаря несколько большей длине  $n=1000$  используемых кодов и вследствие этого хорошей сходимости решений QМПД к решению ОД.

Для сопоставления на рис.6 приведены также нижние оценки для применявшихся при моделировании недвоичных СОК в случае оптимального декодирования для  $d=5$  и 9, полученные с использованием приведённых выше формул (10) - (15).

Заметим, что в настоящее время неизвестны другие алгоритмы декодирования с приемлемой сложности реализации, которые могут обеспечить такие же характеристики. При увеличении длин кодов характеристики QМПД могут быть дополнительно существенно улучшены.

Очевидно, что каскадирование нескольких недвоичных МПД также значительно улучшит вероятностные характеристики

декодирования без значительного увеличения сложности, т. е. числа операций, осуществляемых декодером, работающим только с целыми числами и не выполняющего никаких операций умножения или деления. Это является его решающим преимуществом перед алгоритмами для кодов РС при сопоставлении их по сложности реализации.

Представленные результаты позволяют утверждать, что описанные почти 20 лет назад недвоичные МПД обладают действительно высокой эффективностью, недоступной для декодеров кодов РС. При этом сложность их реализации весьма невелика и, как показывает детальный анализ, может быть дополнительно значительно снижена.

## **11. Выводы**

Огромное преимущество МПД перед другими алгоритмами декодирования по числу операций как в двоичных, так и в недвоичных каналах позволяет считать, что к настоящему времени все принципиальные задачи предпринятых теоретических и прикладных исследований МПД успешно решены.

Разработанные программные и аппаратные версии МПД подтверждают все основные выводы об эффективности и производительности МПД. Программные версии соответствуют

вычислительным затратам порядка 50-200 операций на бит данных, учитываемым в приведённых выше оценках сложности алгоритма для достаточно больших шумов канала. Они реализованы в специализированных телевизионных системах.

При аппаратной реализации на ПЛИС даже на малых кристаллах ёмкостью до 200К МПД имеет производительность более 80 Мбит/с и энергетический выигрыш порядка 7,5 дБ. Такое соотношение характеристик эффективности и производительности для других некаскадных, базовых алгоритмов декодирования принципиально недостижимо.

Каскадные кодовые конструкции с применением МПД в области R~C заслуживают отдельного рассмотрения.

Таким образом, в результате 30-летних исследований разработан широкий класс многопороговых алгоритмов, которые могут быть полезны для многих современных высокоскоростных систем связи с предельно возможными уровнями энергетического выигрыша и очень высоким быстродействием.

Исследования МПД свидетельствуют, что те алгоритмы, которые нерационально используют вычислительные ресурсы, все же значительно проигрывают гораздо более простым, которые решают проблему декодирования более эффективно и экономно. Несомненно, что проблемы сложности реализации кодирования сохранятся в

обозримом будущем, а в связи с ростом скоростей обмена информацией требования более простой реализации декодеров будут все более актуальными. Более предпочтительными при всех вариантах реализации окажутся те алгоритмы, которые выполняют только очень простые, однородные и быстрые операции. Наиболее полно этим требованием удовлетворяют МПД. А соответствие его возможностей характеристикам самых сложных алгоритмов делает многопороговые алгоритмы еще более привлекательными.

Дополнительные сведения и результаты исследований МПД представлены на специализированном веб-сайте ИКИ РАН [www.mtdbest.iki.rssi.ru](http://www.mtdbest.iki.rssi.ru).

Проведение исследований МПД поддерживалось Научным советом по комплексной проблеме "Кибернетика" СССР, ИКИ РАН, а также НИИРадио Министерства связи.

## Литература

1. Месси Дж. Пороговое декодирование. - М.: Мир, 1966.
2. Золотарёв В.В. Устройство для декодирования линейных свёрточных кодов. - Авторское свидетельство на изобретение СССР №492878, "Бюллетень изобретений №43", 1975 г.
3. Самойленко С.И., Давыдов А.А., Золотарёв В.В., Третьякова Е.И. Вычислительные сети. – М.: Наука, 1981, с. 278.
4. Золотарёв В.В., Овечкин Г.В.. Эффективные алгоритмы помехоустойчивого кодирования для цифровых систем связи. - "Электросвязь", Москва, №9, 2003 г., с. 12-15.

5. Золотарёв В.В. Простые методы исправления ошибок в каналах с большим уровнем шума. – Радиотехника, №10, 1991.
6. Золотарёв В.В. Реальный энергетический выигрыш кодирования для спутниковых каналов. - В кн.: 4-я Международная Конференция “Спутниковая связь – ICSC-2000”, Т.2, с. 20-25, М.: МЦНТИ, 2000.
7. V.V.Zolotarev. The Multithreshold Decoder Performance in Gaussian Channels. -In Proc.: 7-th International Symposium on Communication Theory and applications, held on 13-18 July 2003, St. Martin's College, Ambleside, UK, pp.18-22.
8. Золотарёв В.В. Характеристики каскадирования многопороговых декодеров для спутниковых каналов связи. - 5-я международная конференция "Цифровая обработка сигнала и её применение", М., 2003 г., с. 353-356.
9. Золотарёв В.В. Многопороговые декодеры. - Веб-сайт [www.mtdbest.iki.rssi.ru](http://www.mtdbest.iki.rssi.ru).
10. Золотарёв В.В., Овечкин Г.В. Помехоустойчивое кодирование. Методы и алгоритмы. Справочник. "Горячая линия - Телеком", Москва, 2004, с.124.
11. Berrou C., Glavieux A., Thitimajshima P. Near Shannon Limit Error-Correcting Coding and Decoding: Turbo-Codes. - Proceeding of ICC'93, Geneva, Switzerland, pp. 1064-1070, May, 1993.
12. Townsend R.L., Weldon E.J. Self-Orthogonal Quasi-Cyclic Codes. - IEEE Trans., IT-13, 1967, pp.183-195.
13. В.В.Золотарёв, Г.В.Овечкин. Сравнение сложности реализации эффективных методов декодирования помехоустойчивых кодов. - Труды НТОРЭС им. А.С.Попова, Выпуск VI-1, 6-я Международная конференция и выставка "Цифровая обработка сигналов и её применение", Доклады-1, с.220-222.
14. Золотарёв В.В.. Алгоритмы кодирования символьных данных в вычислительных сетях. - В сб.: "Вопросы кибернетики", ВК-106, М.,1985, с.45-49.
15. Золотарёв В.В.. Многопороговое декодирование в недвоичных каналах. - В сб.: "Вопросы радиоэлектроники", Серия ЭВТ, вып.12, М.,1984, с.14-17.